Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析
习题集题解
（六）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

封面设计　宋瑜

数学分析习题集题解（一）　定价13.30 元

分析引论

数学分析习题集题解（二）　定价15.10 元

单变量函数的微分学

数学分析习题集题解（三）　定价17.70 元

不定积分 定积分

数学分析习题集题解（四）　定价15.50 元

级数

数学分析习题集题解（五）　定价19.80 元

多变量函数的微分法 带参数的积分

数学分析习题集题解（六）　定价15.90 元

重积分和曲线积分

9 787533 101046 >

ISBN 7-5331-0104-9

O·10　定价 15.90 元

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（六）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 (6)/费定晖编.—2版.—济南：山东科学技术出版社，1999.9
(2003.2重印)

ISBN 7-5331-0104-9

Ⅰ.Б… Ⅱ.费… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题
Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43949号

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

(六)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版

(济南市玉函路16号 邮编250002)

山东科学技术出版社发行

(济南市玉函路16号 电话2064651)

济南中汇印务有限责任公司印刷

*

787mm×1092mm 32开本 17印张 400千字

2003年2月第2版第13次印刷

印数：202501-210500

ISBN 7-5331-0104-9
O·10 定价：15.90元

出版说明

吉米多维奇(Б. П. Д ЕМИД ОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄

本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目　　录

第八章　重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1° 二重积分的直接计算法　所谓连续函数 $f(x,y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的二重积分乃是指的数

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \to 0 \\ \max|\Delta y_j| \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$，而其和为对所有 i, j 使 $(x_i,y_j) \in \Omega$ 的那些值来求的。

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

2° 二重积分中的变量代换　若可微分的连续函数

$$x = x(u,v), y = y(u,v)$$

把平面 Oxy 上的有限闭域 Ω 单值唯一地映射为平面 Ouv 上的域 Ω' 及雅哥比式

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0,$$

则下之公式正确：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|I|\,dudv.$$

特别是，根据公式 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 的情形有

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

3901. 把积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xydxdy$，当作积分和的极限，用直线

$$x=\frac{i}{n}, y=\frac{j}{n} (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

把积分域分为许多正方形，并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值，计算所论积分的值.

解 由于

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\longrightarrow\frac{1}{4}\quad(n\to\infty),$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}, \sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2},$$

故

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xydxdy=\frac{1}{4}.$$

3902. 用直线

$$x=1+\frac{i}{n}, y=1+\frac{2j}{n} (i,j=0,1,\cdots,n)$$

把域 $1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 3$ 分为许多矩形. 作出函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在此域内的积分下和 $\underline{S}$ 与积分上和 $\overline{S}$. 当 $n\to\infty$ 时. 上和与下和的极限等于什么?

解 下和

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2n}{n^2}\left[n+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2+n+\frac{4}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j\right.$$

$$\left.+\frac{4}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}j^2\right]$$

$$=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},$$

其中

$$\sum_{i=0}^{n-1}i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}j^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

而上和

$$\overline{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\underline{S}$ 与 $\overline{S}$ 的极限均等于 $\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$.

3903. 用一系列内接正方形作为积分域的近似域，这些正方形的顶点 A_{ij} 在整数点，并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值. 近似地计算积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确的值加以比较。

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(2，4)，(3，1)，(3，2)，

(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \doteq \frac{1}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2}{\sqrt{34}}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{2}{\sqrt{37}}+\frac{2}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{42}}+\frac{2}{\sqrt{49}}$$

$$\doteq 0.196+0.371+0.343+0.312+0.177$$

$$+0.329+0.302+0.154+0.285$$

$$\doteq 2.470,$$

即 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \doteq 9.880.$$

下面计算积分的精确值:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=4\int_0^5 \ln(y+\sqrt{24+x^2+y^2})\Big|_0^{\sqrt{25-x^2}}dx$$

$$=4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx-2\int_0^5 \ln(24+x^2)dx.$$

由于

$$\int \ln(24+x^2)dx = x\ln(24+x^2)-\int\frac{2x^2}{24+x^2}dx$$

$$=x\ln(24+x^2)-2x+\frac{24}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{24}}+C,$$

从而

$$2\int_0^5 \ln(24+x^2)dx$$

$$=\left[2x\ln(24+x^2)-4x+\frac{48}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{24}}\right]\Big|_0^5$$

$$= 20\ln 7 - 20 + 8\sqrt{6}\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{24}};$$

又

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$= 4[x\ln(\sqrt{25-x^2}+7)]\Big|_0^5 + 4\int_0^5 \frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}}$$

$$= 20\ln 7 + 4\int_0^5 \frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}},$$

再令 $x = 5\sin t$,有

$$\int_0^5 \frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-25\cos^2 t + 25}{5\cos t + 7}dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5\cos t - 7)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{24}{5\cos t + 7}dt$$

$$= (7t - 5\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{7\pi}{2} - 5 - 4\sqrt{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{24}},$$

从而

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$= 20\ln 7 + 14\pi - 20 - 16\sqrt{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{24}}.$$

注意到

$$2\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{24}} - \operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{\pi}{2},$$

最后便得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2-y^2}}$$

$$= 14\pi - 4\sqrt{24}\left(2\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{24}} + \operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{24}}\right)$$

$$\doteq 2\pi(7-\sqrt{24}) \doteq 13.19.$$

将精确值与近似值作比较，显见误差较大，其原因在于有不少不是正方形的域都被忽略，因而产生较大的绝对误差 4.31 及较大的相对误差$\frac{4.31}{13.19} \doteq 32.7\%$.

注意，求 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$ 的精确值若采用极坐标则较为简单：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 \frac{rdr}{\sqrt{24+r^2}}$$

$$= 2\pi(7-\sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排，似应在 3937 题以后才开始使用极坐标．故本题仍用直角坐标进行计算.

3904. 用直线 $x=$ 常数，$y=$ 常数，$x+y=$ 常数把域 S 分为四个相等的三角形，并取被积函数在每个三角形的中线交点之值．近似地计算积分

$$\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS,$$

其中 S 表由直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的三角形。

解　我们只须以 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 及 $x+y=\frac{1}{2}$ 分域 S，即得四个相等的三角形，它们的面积均为$\frac{1}{8}$，重心为

$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$及$\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$. 于是，得此积分的近似值为

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS$$

$$\doteq \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)$$

$$\doteq \frac{1}{8}(0.577-0.816+2.0913)\doteq 0.402,$$

其精确值为

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\sqrt{x-y}\,dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x^{\frac{3}{2}})dx=\frac{2}{5}=0.4.$$

3905. 把域$S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$分为有限个直径小于δ的可求积的子域$\Delta Si(i=1,2,\cdots,n)$. 对于什么样的值$\delta$能保证不等式：

$$\left|\iint_S\sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001$$

成立？其中$(x_i,y_i)\in\Delta S_i$.

解 记函数$\sin(x+y)$在ΔS_i中的振幅为ω_i，则

$$\left|\iint_S\sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]dS\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|dS$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Delta S_i} \omega_i dS = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta S_i.$$

由于域 $S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的面积等于 π，故只要

$$\omega_i < \frac{0.001}{\pi},$$

使能满足原不等式的要求。但因为

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}} |\sin(x_i'+y_i')-\sin(x_i+y_i)| \\
&\leqslant \sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}} |(x_i'+y_i')-(x_i+y_i)| \\
&\leqslant \sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}} [|x_i'-x_i|+|y_i'-y_i|] \\
&\leqslant \sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}} \sqrt{2[(x_i'-x_i)^2+(y_i'-y_i)^2]}\ ^{*)} \\
&= \sqrt{2}\,\delta,
\end{aligned}$$

故只要取

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \times 0.001 \doteq 0.00022,$$

则有

$$\left| \iint\limits_{S} \sin(x+y)dS - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i+y_i)\Delta S_i \right| < 0.001.$$

*) 对于任意非负实数 a、b 有

$$2ab \leqslant a^2+b^2 \text{ 或 } (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2),$$

从而

$$a+b \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

计算积分：

3906. $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy$.

解 $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy = \int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 1$.

3907. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2 dy$.

解 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int_0^1\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx = \frac{1}{40}$.

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr$.

解 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

3909. 设 R 为矩形

$$a \leqslant x \leqslant A,\quad b \leqslant y \leqslant B.$$

证明等式

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy = \int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法，不妨先对 y 后对 x 积分，即得

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy = \int_a^A dx\int_b^B X(x)Y(y)dy$$

$$= \int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

3910. 设：

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y),$$

计算

$$I = \int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy.$$

解 不妨按先对 y 后对 x 积分的顺序计算,即得

$$I=\int_a^A[F_x'(x,B)-F_x'(x,b)]dx$$
$$=F(x,B)\Big|_a^A-F(x,b)\Big|_a^A$$
$$=F(A,B)-F(a,B)-F(A,b)+F(a,b).$$

3911. 设 $f(x)$ 为在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 内的连续函数,证明不等式

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

此处仅当 $f(x)=$ 常数时等号成立.

证 因为

$$0\leqslant\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy$$
$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-2(\int_a^b f(x)dx)^2$$
$$+(b-a)\int_a^b f^2(y)dy,$$

故有

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

当 $f(x)=$ 常数时,显然上式中等号成立. 反之,设上式中等号成立,则

$$\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy=0.$$

由于函数 $F(x)=\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy$ 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的非负连续函数,故 $F(x)\equiv0(a\leqslant x\leqslant b)$. 特别 $F(a)=0$,即 $\int_a^b[f(a)-f(y)]^2dy=0$. 又由于函数

$$G(y)=[f(a)-f(y)]^2$$

是 $a\leqslant y\leqslant b$ 上的非负连续函数，故 $G(y)\equiv 0(a\leqslant y\leqslant b)$. 因此，$f(y)\equiv f(a)(a\leqslant y\leqslant b)$，即 $f(x)=$ 常数. 证毕.

3912. 下列积分有什么样的符号：

(a) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$;

(б) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy$;

(в) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x-y)dxdy$?

解 (a) 由于 $0<x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant 1$ 及 $\ln(x^2+y^2)\leqslant\ln 1=0$，且当 $|x|+|y|<1$ 时 $\ln(x^2+y^2)<0$，故

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)dxdy<0.$$

(б) 我们有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy=I_1-I_2-I_3,$$

其中

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy,$$

$$I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,dxdy,$$

$$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,dxdy.$$

显然

$$0 < I_1 < \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} dxdy = \pi,$$

$$I_2 > 0,$$

$$I_3 > \iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} dxdy = 4\pi - 2\pi = 2\pi,$$

故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy < 0.$$

(в) 我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}} \arcsin(x+y)dxdy$$

$$+ \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)dxdy.$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零,第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数,因而积分值是正的.于是,原积分是正的.

3913. 求函数

$$f(x,y) = \sin^2 x\sin^2 y$$

在正方形:$0\leqslant x\leqslant\pi$,$0\leqslant y\leqslant\pi$ 内的平均值.

解 平均值

$$I_0 = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0\leqslant y\leqslant\pi}} \sin^2 x\sin^2 y\,dxdy$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^\pi \sin^2 x\,dx\right)^2 = \frac{1}{\pi^2}\left(\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}.$$

3914. 利用中值定理，估计积分

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{dxdy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

之值.

解 由于积分域的面积为 200，故由积分中值定理知

$$I = \frac{1}{100 + \cos^2\xi + \cos^2\eta} \cdot 200$$

$$= \frac{200}{100 + \cos^2\xi + \cos^2\eta}, \qquad (1)$$

其中(ξ,η)为域 $|x| + |y| \leqslant 10$ 中的某点.

显然

$$0 \leqslant \cos^2\xi + \cos^2\eta \leqslant 2,$$

我们证明必有

$$0 < \cos^2\xi + \cos^2\eta < 2. \qquad (2)$$

由于函数 $\cos^2 x + \cos^2 y$ 在有界闭域 $|x| + |y| \leqslant 10$ 上的最大值为 2，最小值为 0. 从而连续函数 $\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ 在有界闭域 $|x| + |y| \leqslant 10$ 上的最小值为 $\frac{1}{102}$，最大值为 $\frac{1}{100}$. 如果 $\cos^2\xi + \cos^2\eta = 2$，则由(1)式知

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \left(\frac{1}{100 + \cos^2 x - \cos^2 y} - \frac{1}{102}\right) dxdy$$

$$= I - I = 0.$$

但 $f(x,y) = \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102}$ 是非负连续函数，从而必有 $f(x,y) \equiv 0$（在域 $|x| + |y| \leqslant 10$ 上），

即 $\cos^2 x+\cos^2 y\equiv 2$（在域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 上）. 这显然是错误的. 由此可知，$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$. 同理可证 $\cos^2\xi+\cos^2\eta>0$. 于是，(2) 式成立. 从而，得

$\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100}$，即 $1.96<I<2$.

3915. 求圆 $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$ 上的点到原点的距离之平方的平均值.

解 平均值

$$I_0=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)dxdy.$$

由于

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}y^2dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi R^2}\int_{a-R}^{a+R}dx\int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}}y^2dy$$

$$=\frac{1}{3\pi R^2}\left\{6b^2\int_{a-R}^{a+R}\sqrt{R^2-(x-a)^2}dx\right.$$

$$\left.+2\int_{a-R}^{a+R}[R^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}dx\right\}$$

$$=\frac{2b^2}{\pi R^2}\left[\frac{x-a}{2}\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{R}\right]\Bigg|_{a-R}^{a+R}$$

$$+\frac{2}{3\pi R^2}\left\{\frac{x-a}{8}[5R^2-2(x-a)^2]\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3R^4}{8}\arcsin\frac{x-a}{R}\right\}\Bigg|_{a-R}^{a+R}$$

$$=\frac{2b^2}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^2}{2}+\frac{2}{3\pi R^2}\cdot\frac{3\pi R^4}{8}=b^2+\frac{R^2}{4},$$

同理，有

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2} x^2dxdy = a^2+\frac{R^2}{4}.$$

于是，

$$I_0 = a^2+b^2+\frac{R^2}{2}.$$

在问题 3916 — 3922 中对二重积分 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ 内按所指示的区域 Ω 依两个不同的顺序安置积分的上下限.

3916. Ω — 以 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$ 为顶点的三角形.

解 为方便起见，将二重积分 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ 记以 I.

于是，$I=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx.$

3917. Ω — 以 $O(0,0)$，$A(2,1)$，$B(-2,1)$ 为顶点的三角形.

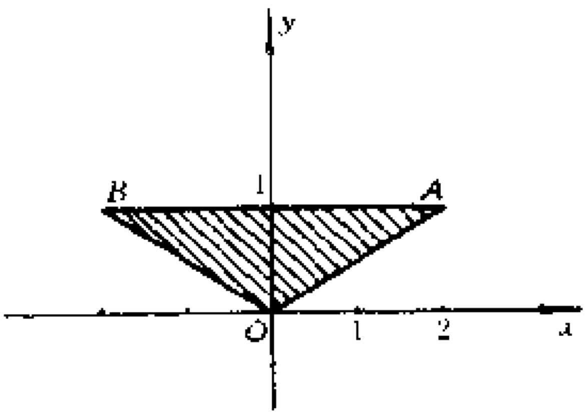

图 8.1

解 如图 8.1 所示

OA 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$，

OB 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x$，

AB 的方程为 $y=1$.

于是,

$$I=\int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx=\int_{-2}^{0} dx\int_{-\frac{1}{2}x}^{1} f(x,y)dy$$

$$+\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{1} f(x,y)dy$$

$$=\int_{-2}^{2} dx\int_{\frac{1}{2}|x|}^{1} f(x,y)dy.$$

3918. Ω — 以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$ 为顶点的梯形。

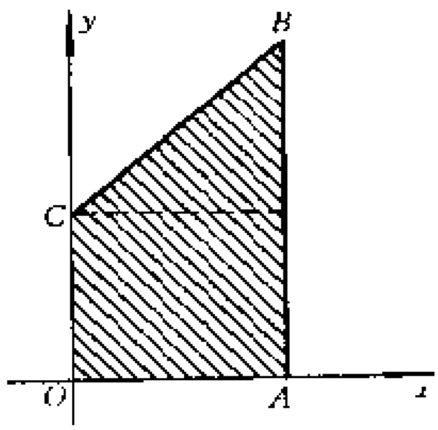

图 8.2

解 如图 8.2 所示, BC 的方程为 $y-1=x$.

于是,

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1+x} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^{1} f(x,y)dx.$$

3919. Ω — 圆 $x^2+y^2\leqslant 1$.

解 $$I=\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

$$=\int_{-1}^{1} dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

3920. Ω — 圆 $x^2+y^2\leqslant y$.

解 如图 8.3 所示. 积分域的围线 $x^2+y^2=y$ 即为 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

于是,

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx.$$

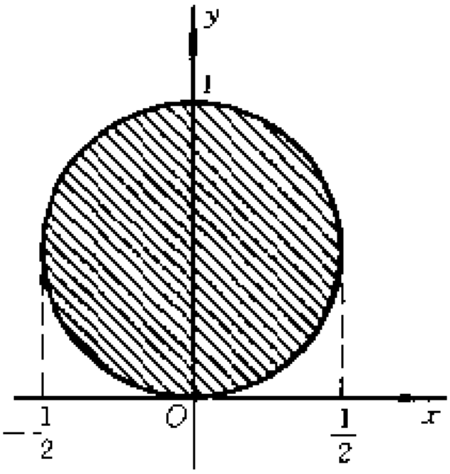

图 8.3

3921. Ω—由曲线 $y=x^2$ 及 $y=1$ 所包围的抛物线的一节.

解　曲线 $y=x^2$ 及 $y=1$ 的交点为 $(1,-1)$，$(1,1)$.

于是，

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx.$$

3922. Ω— 圆环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

解　如图 8.4 所示. 若先对 y 后对 x 积分，则

$$I=\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy\right.$$

$$\left.+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy\right\}$$

$$+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy.$$

若先对 x 后对 y 积分，则

$$I=\int_{-2}^{-1}dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dx$$

$$+\int_{-1}^{1}dy\left\{\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx\right.$$

$$+\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\Big\}$$

$$+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$

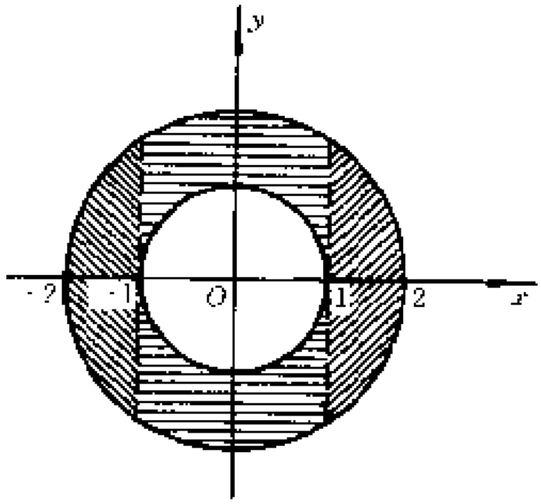

图 8.4

3923. 证明迪里黑里公式

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy$$

$$=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx\,(a>0).$$

证 公式左端的逐次积分，等于积分 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$，其中 Ω 为三角形域 OAB（图 8.5）：$O(0,0)$，$A(a,0)$，$B(a,a)$. 对于该积分，若化为先对 x 后对 y 的逐次积分，即为公式的右端. 于是本题获证。

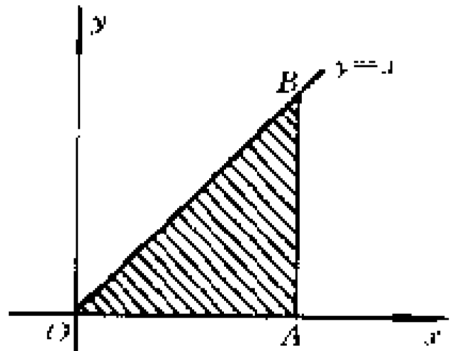

图 8.5

在下列积分中改变积分的顺序：

3924. $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy.$

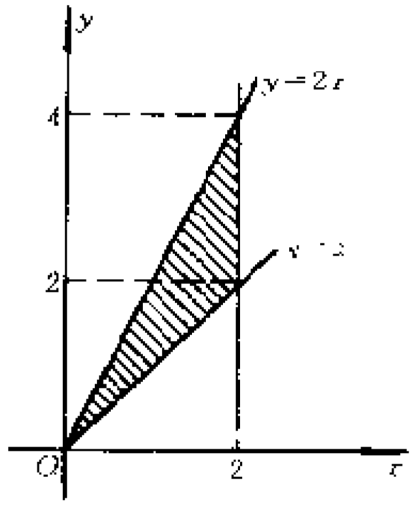

图 8.6

解 积分域的围线为：$y=x$，$y=2x$ 及 $x=2$，如图 8.6 所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx$$

$$+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx.$$

3925. $\int_{-6}^{2} dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy.$

解 积分域的围线为：$y=2-x$ 及 $y-1=\dfrac{x}{4}$，其交点为$(2,0)$，$(-6,8)$，

如图 8.7 所示. 改变积分的顺序，即得

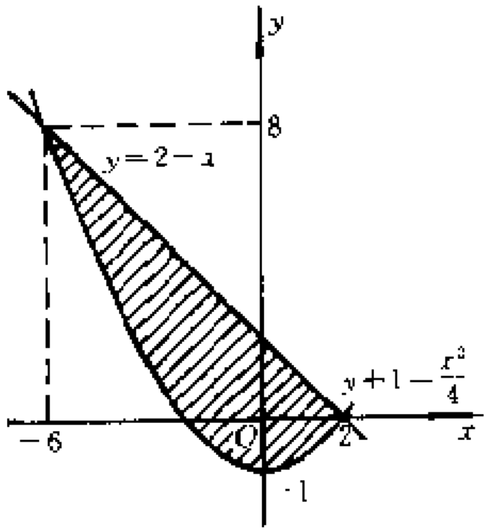

图 8.7

$$\int_{-6}^{2} dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)dx + \int_{0}^{8} dy \int_{2\sqrt{1-y}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

3926. $\int_{0}^{1} dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy.$

解　积分域的围线为：$y = x^2$ 及 $y = x^3$，其交点为(0,0)，(1,1)，如图 8.8 所示. 改变积分的顺序，即得

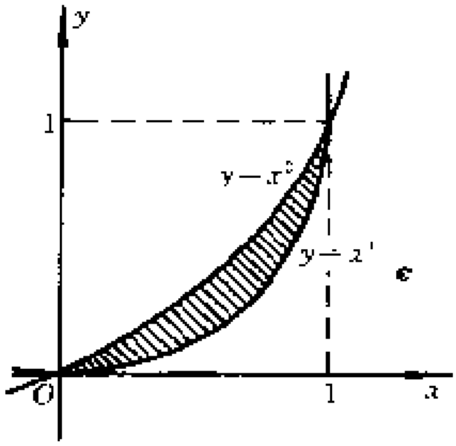

图 8.8

$$\int_{0}^{1} dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$$

$$= \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx.$$

3927. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy.$

解　积分域的围线为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的下半部分及抛物线 $y = 1 - x^2$，如图 8.9 所示. 改变积分的顺序，即得

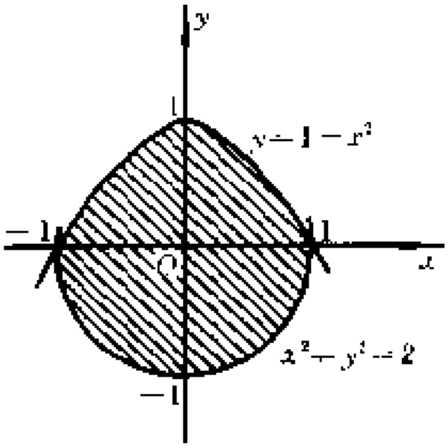

图 8.9

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

$$+ \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx.$$

3928. $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.

解 积分域的围线为圆 $x^2+y^2=2x$ 或 $(x-1)^2+y^2=1$ 及直线 $y=2-x$，其交点为 $(2,0)$，$(1,1)$，如图 8.10 中阴影部分所示. 改变积分的顺序，即得

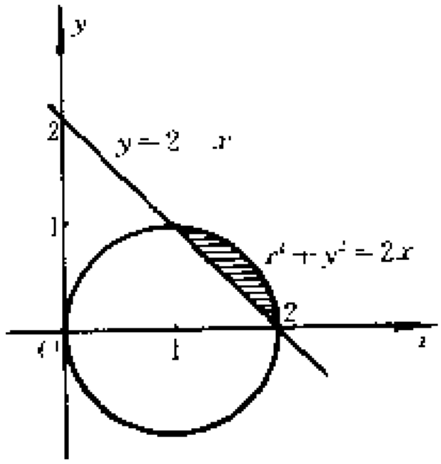

图 8.10

$$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

3929. $\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy\,(a>0)$.

解 积分域由围线 $(x-a)^2+y^2=a^2\,(y\geqslant 0)$，$y^2=2ax\,(y\geqslant 0)$ 及 $x=2a$ 组成. 如图 8.11 中阴影部分所示. 改变积分的顺序，即得

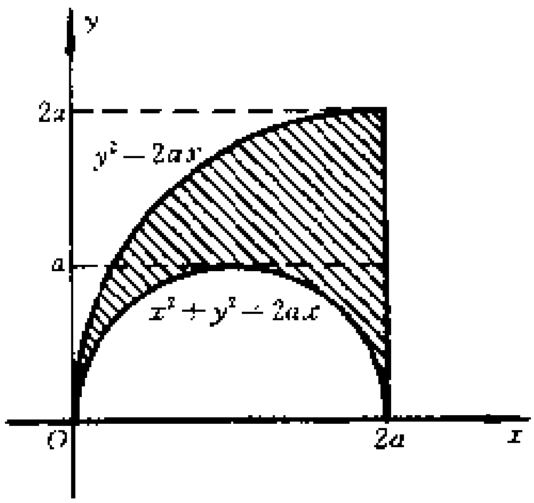

图 8.11

$$\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^a dy\left\{\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx\right\}$$

$$+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

3930. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy.$

解 积分域如图 8.12 中阴影部分所示. 改变积分顺序,即得

$$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx.$$

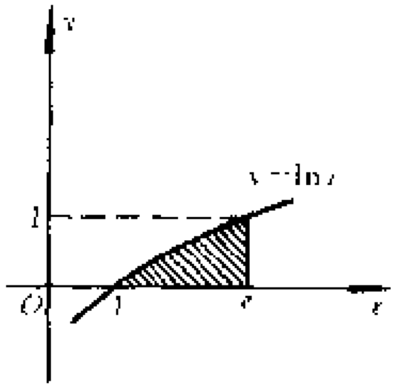

图 8.12

3931. $\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy.$

解 积分域如图 8.13 中阴影部分所示. 由于 $y=\sin x$ 的反函数,当 y 从 0 变到 1 时为 $x=\arcsin y$,当 y 从 1 变到 -1 时 $x=\pi-\arcsin y$,当 y 从 -1 变到 0 时为 $x=2\pi+\arcsin y$,故改变积分的顺序,即得

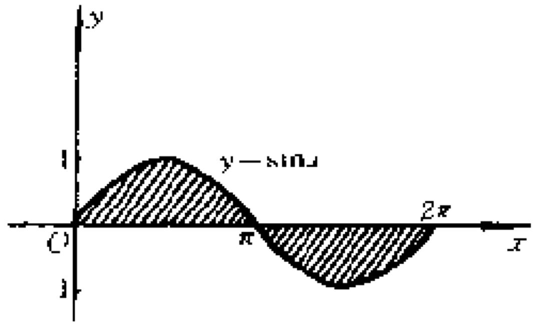

图 8.13

$$\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$$

$$-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx.$$

计算下列积分:

3932. $\iint\limits_{\Omega} xy^2dxdy$,设 Ω 是由抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\frac{p}{2}(p>0)$ 所界的区域.

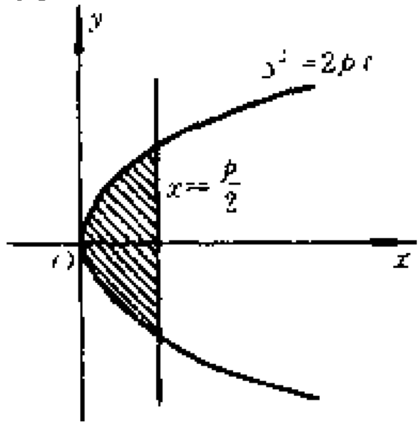

图 8.14

解 积分域如图 8.14 所示. 于是,

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2 dxdy = \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2bx}} xy^2 dy$$

$$= \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{2}{3} x \sqrt{(2px)^3} dx = \frac{p^5}{21}.$$

3933. $\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}} (a>0)$, 设 Ω 是由圆心在点 (a,a) 半径为 a 且与坐标轴相切的圆周的较短弧和坐标轴所围成的区域.

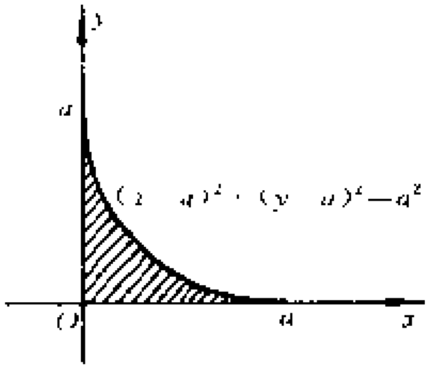

图 8.15

解 如图 8.15 所示. 当 x 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的 x, y 从 0 变到 $a-\sqrt{2ax-x^2}$. 于是,

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2a-x}} \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} dy$$

$$= \int_0^a \frac{adx}{\sqrt{2a-x}} - \int_0^a \sqrt{x}\, dx = \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right) a\sqrt{a}.$$

3934. $\iint\limits_{\Omega} |xy| dxdy$, 设 Ω 是以 a 为半径, 坐标原点为圆心的圆.

解 $\iint\limits_{\Omega} |xy| dxdy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} |xy| dy$

$$= \int_{-a}^{a} (a^2-x^2)|x| dx = 2\int_0^a (a^2-x^2) x dx = \frac{a^4}{2}.$$

3935. $\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2) dxdy$, 设 Ω 是以 $y=x$, $y=x+a$, $y=a$ 和 $y=3a (a>0)$ 为边的平行四边形.

解 如图 8.16 所示. 当 y 从 a 变到 $3a$ 时, 对于每一固定的 y, x 从 $y-a$ 变到 y. 于是,

$$\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_a^{3a}\left[\frac{y^3}{3}+ay^2-\frac{(y-a)^3}{3}\right]dy$$

$$=\frac{168a^4}{12}=14a^4.$$

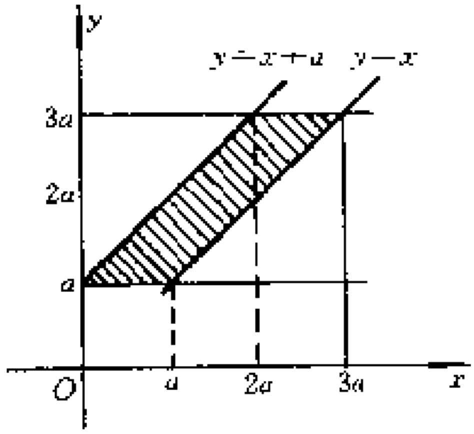

图 8.16

3936. $\iint_{\Omega}y^2dxdy$, 设 Ω 是由横轴和摆线

$$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的第一拱所界的区域.

解 $\iint_{\Omega}y^2dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y}y^2dx$

$$=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4dt$$

$$=\frac{2^4a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}dt=\frac{2^5a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8udu$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8udu+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^8udu\right\}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8udu+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8udu\right\}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8udu^{*)}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\cdot 2\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2}^{**)}=\frac{35}{12}\pi a^4.$$

*) 参看 2282 题的结果.

＊＊）参看 2281 题的结果。

在二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

中，假定 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$，变换为极坐标 r 和 φ，并配置积分的限，设：

3937. Ω- 圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

解 雅哥比式 $I=r$，以下各题不再写出.

φ 从 0 变到 2π，γ 从 0 变到 a. 于是，

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr.$$

3938. Ω－圆 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$.

解 圆 $x^2+y^2=ax$ 即 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，极坐标方程为 $r=a\cos\varphi$. 当 φ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $a\cos\varphi$. 于是，

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr.$$

3939. Ω— 环 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$.

解 φ 从 0 变到 2π，r 从 $|a|$ 变到 $|b|$. 于是

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{|a|}^{|b|} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr.$$

3940. Ω— 三角形 $0\leqslant x\leqslant 1; 0\leqslant y\leqslant 1-x$.

解 由于直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为

$$r=\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right),$$

因而当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

3941. Ω——抛物线节 $-a \leqslant x \leqslant a$；$\frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant a$.

解　如图 8.17 所示. 区域 Ω 可分为三部分：

(1) 当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$，其中

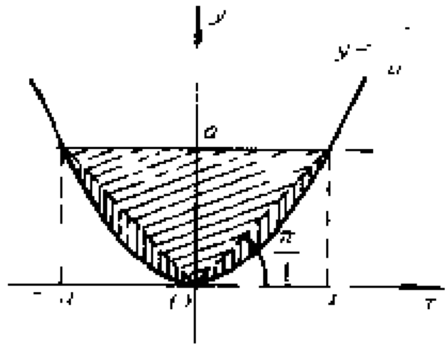

图 8.17

$r = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y = \frac{x^2}{a}$ 的极坐标方程；

(2) 当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{3\pi}{4}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $\frac{a}{\sin\varphi}$；

(3) 当 φ 从 $\frac{3\pi}{4}$ 变到 π 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.

于是

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

3942. 在怎样的情况下，当变换为极坐标之后，积分的限是常数？

解 若变换为极坐标，积分

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_a^b f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr,$$

其中 α、β、a、b 均为常数，则表明积分域 Ω 为 $a \leqslant r \leqslant b$，$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. 它表示圆环面 $a \leqslant r \leqslant b$ 被射线 $\varphi = \alpha$，$\varphi = \beta$ 截出的部分，且只有积分域是这种情况，变换为极坐标后积分的限才是常数. 如 3937 题及 3939 题即为其特例.

在下列积分中，假定 $x = r\cos\varphi$ 和 $y = r\sin\varphi$，变换为极坐标 r 和 φ，并依两种不同的顺序配置积分的限：

3943. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy.$

解 如图 8.18 所示. 若先对 r 积分，则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $\sec\varphi$；当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $\csc\varphi$.

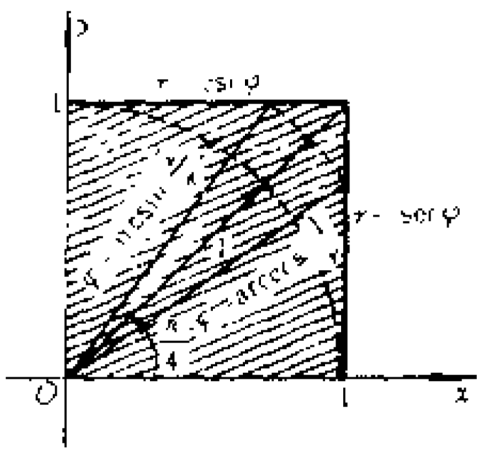

图 8.18

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 1 时，φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$；当 r 从 1 变 到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin\frac{1}{r}$. 于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\sec\varphi} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\csc\varphi} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr$$

$$=\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi+\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi.$$

3944. $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

解 如图 8.19 所示. 若先对 r 积分，则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$ 变到 1.

若先对 φ 积分，则当 r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 变到 1 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$ 变到 $\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$，其中直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为 $r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=\frac{1}{r\sqrt{2}}$ 或 $\frac{\pi}{4}-\varphi=\pm\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$.

于是，

$$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc(\varphi+\frac{\pi}{4})}^{1} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr\int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi.$$

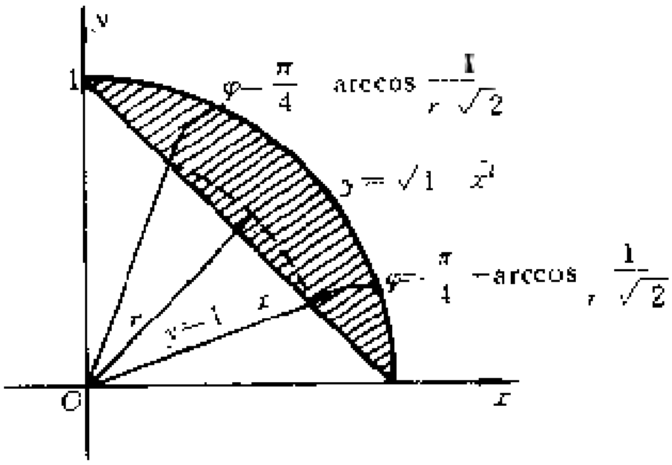

图 8.19

3945. $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy.$

解 如图 8.20 所示.

若先对 r 积分,则当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$ 时,对于每一固定的 φ,r 从 0 变到 $\frac{2}{\cos\varphi}$.

若先对 φ 积分,则当 r 从 0 变到 $2\sqrt{2}$ 时,φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$;当 r

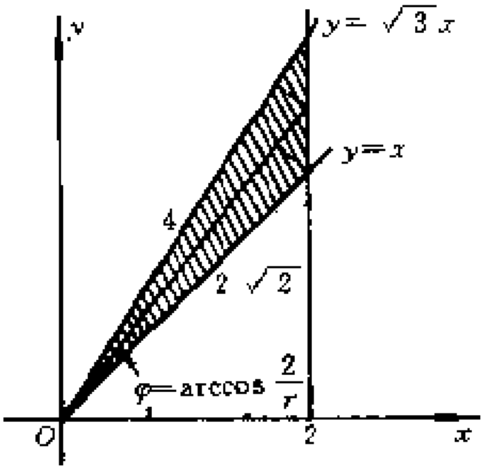

图 8.20

从 $2\sqrt{2}$ 变到 4 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\frac{2}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$. 于是，

$$\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)dr$$

$$= \frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}} rf(r) + \int_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right)rf(r)dr.$$

3946$^+$. ① $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$.

解 如图 8.21 所示. 若先对 r 积分，则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 $\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 变到 $\frac{1}{\cos\varphi}$，其中 $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y = x^2$ 的极坐标方程.

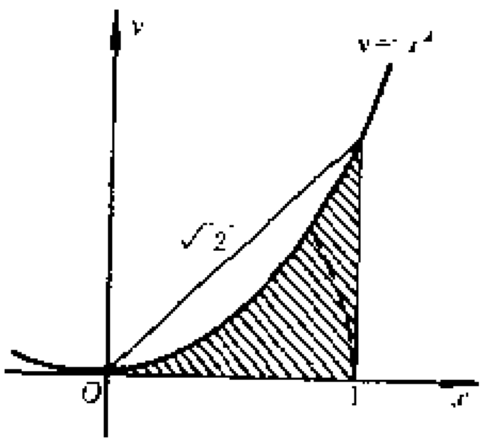

图 8.21

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 1 时对于每一固定的 r，φ 从 0 变到 $\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$ $\left(由 r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} 解出 \varphi\right)$；当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. 于是，

① 题号右上角带"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr =$$

$$\int_0^1 rdr\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi.$$

3947. $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$，其中 Ω 是由曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(x\geqslant 0)$ 所界的域.

解 令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，则曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(x\geqslant 0)$ 的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos2\varphi$，其图象是双纽线的右半部分，如图 8.22 所示.

若先对 r 积分，则当 φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，对于每一固定的 φ，r 从 0 变到 $a\sqrt{\cos2\varphi}$.

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 r，φ 从 $-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}$ 变到 $\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}$. 于是，$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^a rdr\int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

假定 r 和 φ 为极坐标，在下列积分中变更积分的顺序：

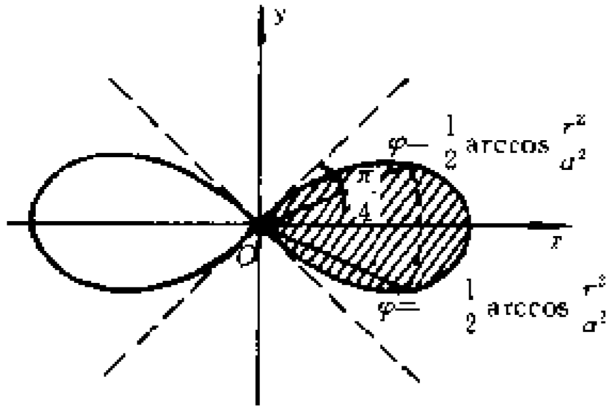

图 8.22

3948. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{a\cos\varphi}f(\varphi,r)dr \quad (x>0)$.

解 积分域为由圆 $r=a\cos\varphi$ 或 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 所围成的圆域.

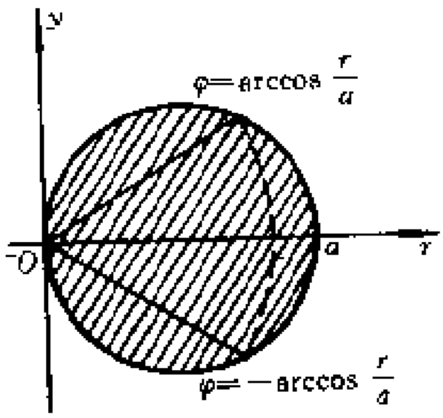

图 8.23

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 r，φ 从 $-\arccos\frac{r}{a}$ 变到 $\arccos\frac{r}{a}$（图 8.23）. 于是，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{a\cos\varphi}f(\varphi,r)dr$$

$$=\int_{0}^{a}dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(\varphi,r)d\varphi.$$

3949. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}f(\varphi,r)dr \quad (a>0)$.

解 积分域由双纽线 $r^2=a^2\sin 2\varphi$ 的右上部分围成（图

8.24).

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$. 于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}f(\varphi,r)dr$$

$$=\int_0^a dr\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}f(\varphi,r)d\varphi.$$

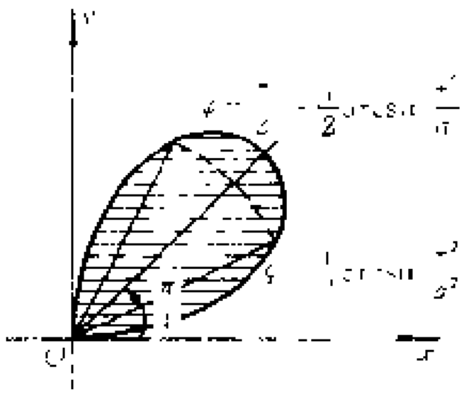

图 8.24

3950. $\int_0^a d\varphi\int_0^\varphi f(\varphi,r)dr$

$(0<a<2\pi)$.

解 积分域由曲线 $r=\varphi$(阿基米德螺线)与射线 $\varphi=a$ 围成(图 8.25).

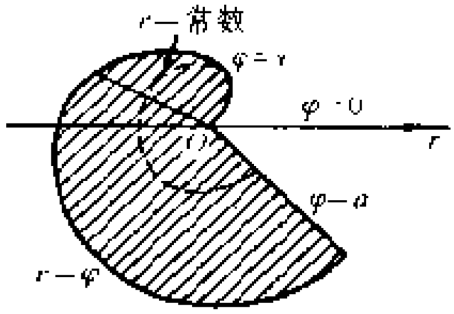

图 8.25

改变积分顺序，即得

$$\int_0^a d\varphi\int_0^\varphi f(\varphi,r)dr$$

$$=\int_0^a dr\int_r^a f(\varphi,r)d\varphi.$$

变换成极坐标，以一重积分来代替二重积分：

3951. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy.$

解 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 f(r)rdr$

$=2\pi\int_0^1 rf(r)dr.$

3952. $\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$,其中 $\Omega=\{|y|\leqslant|x|;$
$|x|\leqslant 1\}$.

解 域 Ω 如图 8.26 所示。先对 φ 积分,则当 r 从 0 变到 1 时,φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$;当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时,对于每一固定的 r,φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$. 于是,

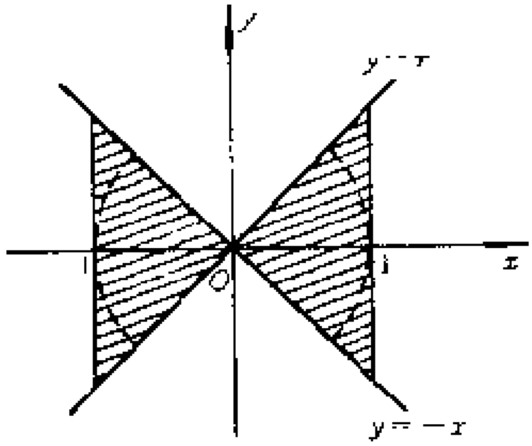

图 8.26

$$\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$
$$=2\int_0^1 rf(r)\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi+4\int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi$$
$$=\pi\int_0^1 rf(r)dr+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)dr.$$

3953. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$.

解 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi} f(\mathrm{tg}\varphi)rdr$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\mathrm{tg}\varphi)\cos^2\varphi d\varphi.$$

变换成极坐标,以计算下列二重积分:

3954. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$

解 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\cdot rdr = \frac{2\pi a^3}{3}.$

3955. $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$

解 $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2-y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_\pi^{2\pi} r\sin rdr$

$= 2\pi\int_\pi^{2\pi} r\sin rdr = -6\pi^2.$

3956. 利用函数组

$$u = \frac{y^2}{x}, \qquad v = \sqrt{xy}$$

把矩形 $S\{a < x < a+h, b < y < b+h\}(a > 0, b > 0)$

变换为域 S'. 求域 S' 的面积与 S 的面积之比.

当 $h \to 0$ 时,此比值的极限等于什么?

解 正方形的角点 $A(a,b)$, $B(a+h,b)$, $c(a+h,b+h)$, $D(a,b+h)$ 对应于 Ouv 平面上的点 $A'\left(\frac{b^2}{a}, \sqrt{ab}\right)$,

$B'\left(\frac{b^2}{(a+h)^2}, \sqrt{(a+h)b}\right)$,

$C'\left(\frac{(b+h)^2}{a+h}, \sqrt{(a+h)(b+h)}\right)$,

$D'\left(\frac{(b+h)^2}{a}, \sqrt{a(b+h)}\right)$. 正方形的四边 $y=b, x=a+h, y=b+h, x=a$ 对应于 Ouv 平面上的四条曲线,即

$$A'B':u=\frac{b^3}{v^2};\quad B'C':u=\frac{v^4}{(a+h)^3};$$

$$C'D':u=\frac{(b+h)^3}{v^2};\quad D'A':u=\frac{v^4}{a^3}.$$

由这四条曲线围成的域即为 S'(图 8.27).

于是,域 S' 的面积

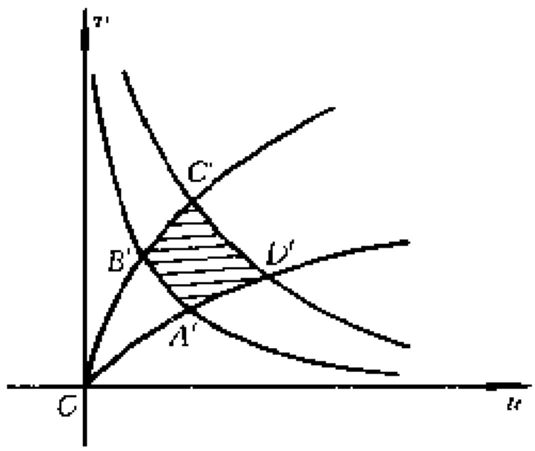

图 8.27

$$S'=\iint\limits_{S'}dudv=\int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{a(b+h)}}\frac{v^4}{a^3}dv$$

$$+\int_{\sqrt{a(b+h)}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\frac{(b+h)^3}{v^2}dv-\int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{(a+h)b}}\frac{b^3}{v^2}dv$$

$$-\int_{\sqrt{(a+h)b}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\frac{v^4}{(a+h)^3}dv$$

$$=\frac{1}{5a^3}\left[\sqrt{a^5(b+h)^5}-\sqrt{a^5b^5}\right]$$

$$+(b+h)^3\left[\frac{1}{\sqrt{a(b+h)}}-\frac{1}{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\right]$$

$$-b^3\left[\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{(a-h)b}}\right]$$

$$-\frac{1}{5(a+h)^3}\left[\sqrt{(a+h)^5(b+h)^5}-\sqrt{(a+h)^5b^5}\right]$$

$$=\frac{6}{5}\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right]\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right).$$

从而，域 S' 的面积与 S 的面积之比

$$\frac{S'}{S}=\frac{6}{5h^2}\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right]\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right)$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right](\sqrt{a+h}-\sqrt{a})}{h^2\sqrt{a(a+h)}}$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})(\sqrt{b+h}+\sqrt{b})(\sqrt{b+h}-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{b^2+b(b+h)-(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})(\sqrt{b+h}+\sqrt{b})}.$$

上述比式是 h 的函数，并且在 $h=0$ 点连续. 于是，

$$\lim_{h\to 0}\frac{S'}{S}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5b^2}{4\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{b}}=\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

事实上，应用洛比塔法则求此极限更简单些，这是因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5}{2}\sqrt{(b+h)^3}=\frac{5}{2}b^{\frac{3}{2}}.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}(a+h)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}.$$

于是，

$$\lim_{h\to 0}\frac{S'}{S}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}b^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

注意，若利用二重积分的变量代换，则计算 S' 较为简单. 容易算得 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$，故

$$S'=\iint\limits_{S'}dudv=\iint\limits_{S}\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|dxdy$$

$$= \frac{3}{2}\int_{a}^{a+h} x^{-\frac{3}{2}}dx\int_{b}^{b+h} y^{\frac{3}{2}}dy$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}\right)(\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5})$$

与上述结果一致. 但是,从原习题集题目的安排来看,似乎应从 3966 题以后才开始用一般的变量代换来计算二重积分.

引入新的变量 u,v 来代替 x,y,并确定下列二重积分中的积分限:

3957. $\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy (0 < a < b; 0 < \alpha < \beta)$,若 $u = x$, $v = \frac{y}{x}$.

解 在变换 $u = x, v = \frac{y}{x}$ 下,区域 $\Omega = \{a \leqslant x \leqslant b, \alpha x \leqslant y \leqslant \beta x\}$ 变为 $\Omega = \{a \leqslant u \leqslant b, \alpha \leqslant v \leqslant \beta\}$. 变换的雅哥比式

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u > 0.$$

于是

$$\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy = \int_a^b udu\int_{\alpha}^{\beta} f(u,uv)dv.$$

3958. $\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy$,若 $u = x + y, v = x - y$.

解 在变换 $u = x + y, v = x - y$ 下,区域 $\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant 2, 1-x \leqslant y \leqslant 2-x\}$ 变为 $\Omega = \{1 \leqslant u \leqslant 2, -u \leqslant v \leqslant 4-u\}$. 事实上,$u + v = 2x, u - v = 2y$,故 $0 \leqslant u + v \leqslant 4$,即 $-u \leqslant v \leqslant 4-u$. 变换的雅哥比式 $I = -\frac{1}{2}$,从而 $|I| = \frac{1}{2}$. 于是,

$$\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

3959. $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$,其中 Ω 是由曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$,$x=0, y=0 (a>0)$ 所界的区域,若

$$x = u\cos^4 v, \quad y = u\sin^4 v.$$

解 Ω 的界线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x = a\cos^4 v, y = a\sin^4 v \quad \left(0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

对于变换 $x = u\cos^4 v, y = u\sin^4 v$,有 $|I| = 4|u\cos^3 v \cdot \sin^3 v|$,且区域 Ω 变为 $\Omega' = \{0 \leqslant u \leqslant a, 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\}$.

于是,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

$$= 4\int_0^a u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v f(u\cos^4 v, v\sin^4 v) dv$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v dv \int_0^a u f(u\cos^4 v, u\sin^4 v) du.$$

3960. 证明:变数代换

$$x + y = \xi, \quad y = \xi\eta$$

把三角形 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x$ 变为单位正方形 $0 \leqslant \xi \leqslant 1, 0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

证 由 $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$ 及 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 得 $0 \leqslant x + y \leqslant 1$,即

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

又 $\eta=\frac{y}{\xi}\leqslant\frac{y}{0+y}=1$，且 $\eta\geqslant 0$，故 $0\leqslant\eta\leqslant 1$.

反之，从 $0\leqslant\xi\leqslant 1$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$ 得 $0\leqslant x+y\leqslant 1$，$y=\xi\eta$，$x=\xi(1-\eta)$，故 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1-x$. 因此，三角形域 $\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$ 变为正方形域 $\{0\leqslant\xi\leqslant 1, 0\leqslant\eta\leqslant 1\}$.

3961. 在什么样的变数代换下，由曲线 $xy=1$，$xy=2$，$x-y+1=0$，$x-y-1=0$（$x>0$，$y>0$）所界的曲线四边形变换成矩形，其边平行于坐标轴？

解 原四条曲线为 $xy=1$，$xy=2$，$x-y=-1$，$x-y=1$（$x>0$，$y>0$），故显然应作变换 $xy=u$，$x-y=v$. 这时 u 从 1 变到 2，v 从 -1 变到 1，故原积分域变为域：$1\leqslant u\leqslant 2$，$-1\leqslant v\leqslant 1$.

进行适当的变数代换，化二重积分为一重的：

3962. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)dxdy$.

解 作变换 $x+y=u$，$x-y=v$ 或 $x=\frac{u+v}{2}$，$y=\frac{u-v}{2}$，则有 $|I|=\frac{1}{2}$，且 u 从 -1 变到 1，v 从 -1 变到 1. 于是，

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)dxdy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dv\int_{-1}^{1}f(u)du$$

$$=\int_{-1}^{1}f(u)du.$$

3963. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)dxdy \quad (a^2+b^2\neq 0)$.

解　作变换$\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=u$，$\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=v$，则有$x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$，及$x^2+y^2=u^2+v^2\leqslant 1$，故域$x^2+y^2\leqslant 1$变为$u^2+v^2\leqslant 1$，且有$|I|=1$. 于是，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)dxdy$$

$$=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)dudv$$

$$=\int_{-1}^{1}du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)dv$$

$$=\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}dv$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)du.$$

3964. $\iint\limits_{\Omega}f(x,y)dxdy$，其中$\Omega$为由曲线$xy=1$，$xy=2$，$y=x$，$y=4x(x>0,y>0)$所界的域.

解　作变换$xy=u$，$\frac{y}{x}=v$，则域Ω变为域

$\Omega'=\{1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4\}$，且$|I|=\frac{1}{2v}$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)dxdy=\int_1^4\frac{dv}{2v}\int_1^2 f(u)du=\ln 2\cdot\int_1^2 f(u)du.$$

3965. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$，其中$\Omega$是由曲线$x^2+y^2=x+y$所包围的域.

解 域Ω即圆$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. 作变换：$x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则域$\Omega$变为域$\Omega'=\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\}$，且$|I|=r$. 于是

$$\iint_{\Omega}(x+y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}[r+r^2(\sin\varphi+\cos\varphi)]dr=\frac{\pi}{2}.$$

计算下列二重积分：

3966. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)dxdy$.

解 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)dxdy$

$$=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy=\frac{4}{3}.$$

3967. $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$，其积分域$\Omega$是由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所界的域.

解 作变换：$x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$，则域$\Omega$变为域$\Omega'=\{0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$，且$|I|=abr$. 于是，

$$\iint_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 ab\sqrt{1-r^2}rdr$$

$$=2\pi ab\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr=\frac{2\pi ab}{3}.$$

3968. $\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)dxdy$.

解 作变换：$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，并利用对称性，则有

$$\iint\limits_{x^4+y^4\leq 1}(x^2+y^2)dxdy=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\left(\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\right)^{\frac{1}{4}}}r^3dr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{sce}^2\varphi d\mathrm{tg}\varphi}{1+\mathrm{tg}^4\varphi}=2\int_0^1\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}\Big|_0^{1*)}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*）利用 1712 题的结果.

3969. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$，其积分域 Ω 是由曲线 $y^2=2x, x+y=4, x+y=12$ 所界的域.

解 由解方程组

$$\begin{cases}x+y=4,\\ y^2=2x\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}x+y=12,\\ y^2=2x\end{cases}$$

求得两条直线与抛物线的交点为 $A(2,2), B(8,4), C(18,-6). D(8,-4)$（图 8.28）. 于是，

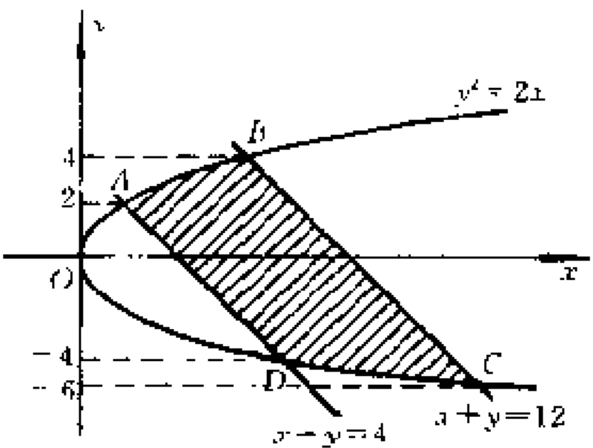

图 8.28

$$\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy=\int_{-6}^{-4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)dx$$

$$+\int_{4}^{2}dy\int_{4-y}^{12-y}(x+y)dx+\int_{2}^{4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)dx$$

$$=79\frac{13}{15}+384+79\frac{13}{15}=543\frac{11}{15}.$$

3970. $\iint\limits_{\Omega}xydxdy$，其中 Ω 是由曲线 $xy=1$，$x+y=\frac{5}{2}$ 所界的域.

解 曲线 $xy=1$ 与直线 $x+y=\frac{5}{2}$ 的交点为 $\left(\frac{1}{2},2\right)$，$\left(2,\frac{1}{2}\right)$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega}xydxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{2}xdx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}ydy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{25}{4}x-5x^2+x^3-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=1\frac{37}{128}-\ln 2.$$

3971. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|dxdy$.

解 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|dxdy=\int_{0}^{\pi}dx\int_{0}^{\pi}|\cos(x+y)|dy$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{0}^{\pi}|\cos(x+y)|dy$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{0}^{\pi}|\cos(x+y)|dy$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy-\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)dy\right)dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{-\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)dy\right\}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\left[\sin(x+\pi)-\sin\frac{\pi}{2}\right]\right\}dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{-\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin x\right)+\left[\sin(x+\pi)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\frac{3\pi}{2}\right]\right\}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2dx=2\pi.$$

3972. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dxdy.$

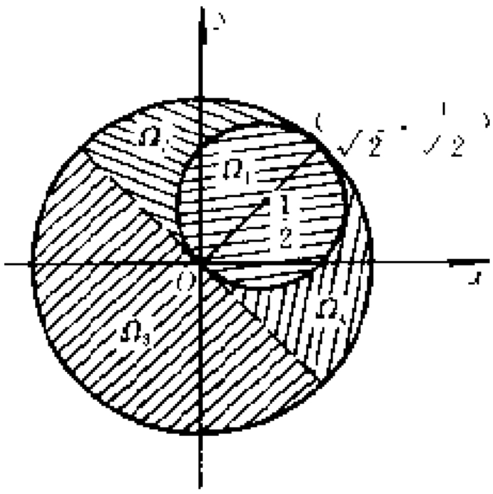

图 8.29

解 积分域如图 8.29 所示，由 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 和 Ω_4 所组成. 其中 Ω_1 为由圆 $\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=0$，即圆 $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}$ 围成的区域，该圆的极坐标方程为

$$r=\sin(\varphi+\frac{\pi}{4}),$$

而圆 $x^2+y^2=1$ 的极坐标方程为 $r=1$. 于是，各区域为

$$\Omega_1: -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4}, 0\leqslant r\leqslant\sin(\varphi+\frac{\pi}{4});$$

$$\Omega_2: \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4}, \sin(\varphi+\frac{\pi}{4})\leqslant r\leqslant 1;$$

$$\Omega_3: \frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{7\pi}{4}, 0\leqslant r\leqslant 1;$$

$$\Omega_4: -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}, \sin(\varphi+\frac{\pi}{4})\leqslant r\leqslant 1.$$

当点在 Ω_1 中时，由于 $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$ 即 $\frac{x+y}{\sqrt{2}}-(x^2+y^2)\geqslant 0$，故 $\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r^2$；当点在 Ω_2、Ω_3、和 Ω_4 中时，$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|=x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}}=r^2-r\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})$. 于是，注意到利用对称性便得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dxdy$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}[r\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})-r^2]rdr$$

$$+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}^{1}\left\{r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right\}rdr$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}d\varphi\int_0^1\left\{r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right\}rdr$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)d\varphi+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right.$$

$$\cdot \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{6}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\Big]d\varphi$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\Big[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\Big]d\varphi$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u du+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u du\right)$$

$$+\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\overset{*)}{=}\frac{\pi}{32}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{32}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9\pi}{16}.$$

*）利用 2281 题的结果.

3973$^+$. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}dxdy.$

解 $$\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}dxdy=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant x^2}}\sqrt{x^2-y}dxdy$$

$$+\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ x^2\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{y-x^2}dxdy$$

$$=\int_{-1}^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy+\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}dy$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3dx+\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

*）参看 1750 题的结果。

计算不连续函数的积分：

3974. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy$.

解 当 $y^2-x^2<2$ 时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$；当 $y^2-x^2>2$ 时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$；当 $y^2-x^2=2$ 时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=0$。现将域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 分成 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ 和 Ω_5 五部分，其界线分别为

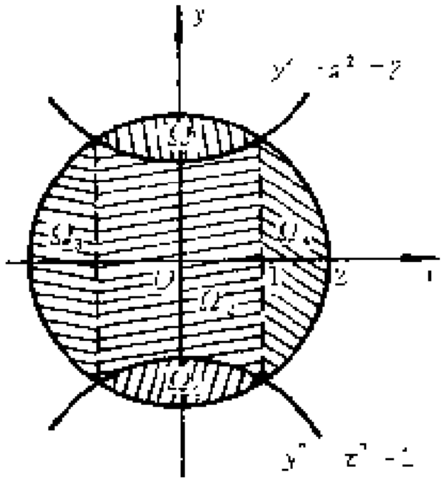

图 8.30

$x^2+y^2=4$，$y^2-x^2=2$，$x=\pm 1$（图 8.30）。当点在 Ω_1 和 Ω_5 中时，$y^2-x^2>2$，故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$；当点在 Ω_2、Ω_3 和 Ω_4 中时，$y^2-x^2<2$，故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$。于是，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy$$

$$=-\iint\limits_{\Omega_1} dx\,dy-\iint\limits_{\Omega_5} dx\,dy+\iint\limits_{\Omega_2} dx\,dy+\iint\limits_{\Omega_3} dx\,dy$$

$$+\iint\limits_{\Omega_4} dx\,dy$$

$$=-4\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy+4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2+x^2}} dy$$

$$+ 4\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy$$

$$= 8\int_0^1 \sqrt{2+x^2}dx + 4\left(\int_1^2 \sqrt{4-x^2}dx\right.$$

$$\left.-\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

3975. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}} [x+y]dxdy.$

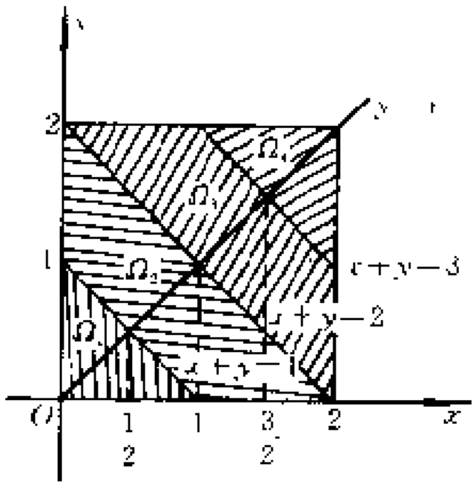

图 8.31

解 当 $0\leqslant x+y<1$ 时，

$[x+y]=0$；

当 $1\leqslant x+y<2$ 时，

$[x-y]=1$；

当 $2\leqslant x+y<3$ 时，

$[x+y]=2$；

当 $3\leqslant x+y<4$ 时，

$[x+y]=3$；

当 $x+y=4$ 时，$[x+y]=4$.

如图 8.31 所示，域 $0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2$ 可分为下列四部分：

$\Omega_1: x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$；

$\Omega_2: 1\leqslant x+y\leqslant 2, x=0, y=0$；

$\Omega_3: 2\leqslant x+y\leqslant 3, x=2, y=2$；

$\Omega_4: x+y\geqslant 3, x\leqslant 2, y\leqslant 2.$

当点属于 Ω_1 的内部时，$[x+y]=0$；当点属于 Ω_2 的内部时，$[x+y]=1$；当点属于 Ω_3 的内部时，$[x+y]=$

2；当点属于 Ω_4 的内部时，$[x+y]=3$. 于是，

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]dxdy=\iint\limits_{\Omega_2}dxdy+2\iint\limits_{\Omega_3}dxdy+3\iint\limits_{\Omega_4}dxdy$$

$$=2\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{x}dy+\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{2-x}dy\right)+4\left(\int_{1}^{\frac{3}{2}}dx\int_{2-x}^{x}dy\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{3}{2}}^{2}dx\int_{2-x}^{3-x}dy\right)+6\int_{\frac{3}{2}}^{2}dx\int_{3-x}^{x}dy$$

$$=2\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)dx+\int_{1}^{2}(2-x)dx\right)$$

$$+4\left(\int_{1}^{\frac{3}{2}}(2x-2)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}dx\right)$$

$$+6\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2x-3)dx=6.$$

3976. $\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\,dxdy.$

解 如图 8.32 所示.

当 $x^2\leqslant y<x^2+1$ 时，

$[y-x^2]=0$；

当 $1+x^2\leqslant y<x^2+2$ 时，

$[y-x^2]=1$；

当 $2+x^2\leqslant y<x^2+3$ 时，

$[y-x^2]=2$；

当 $3+x^2\leqslant y<4$ 时，

$[y-x^2]=3$.

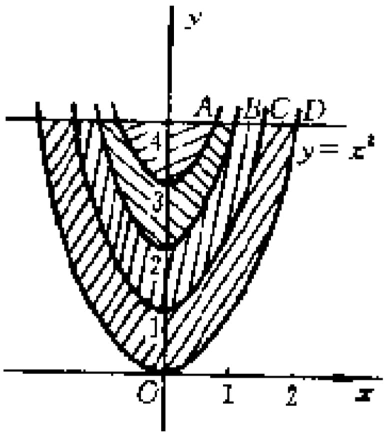

图 8.32

抛物线 $y=x^2+3$，$y=x^2+2$，$y=x^2+1$ 及 $y=x^2$ 与直线 $y=4$ 在第一象限内的交点为 $A(1,4)$，$B(\sqrt{2},4)$，$C(\sqrt{3},4)$ 及 $D(2,4)$，与 Oy 轴对称的位置还有四个交点. 于是，

$$\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\,dxdy$$

$$=2\left[\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2+1}^{x^2+2}dy+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}dx\int_{x^2+1}^{4}dy\right]$$

$$+2\sqrt{2}\left[\int_0^1 dx\int_{x^2+2}^{x^2+3}dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2+2}^{4}dy\right]$$

$$+2\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_{x^2+3}^{4}dy$$

$$=2\left[\sqrt{2}+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(3-x^2)dx\right]+2\sqrt{2}$$

$$\cdot\left[1+\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx\right]+2\sqrt{3}\int_0^1(1-x^2)dx$$

$$=\frac{4}{3}(4+4\sqrt{3}-3\sqrt{2}).$$

3977. 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数，证明

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^m y^n\,dxdy=0.$$

证　作变换：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^m y^n\,dxdy=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant a}}r^{m+n+1}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,drd\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\right.$$

$$\left.\cdot\sin^n\varphi d\varphi\right]. \tag{1}$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi=\pi+t$，即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi = (-1)^m\cdot(-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t$$

$$\cdot\sin^n t dt. \tag{2}$$

当 m 及 n 中有且仅有一个为奇数时，$(-1)^m\cdot(-1)^n=-1$，因而(1)式为零，当 m 和 n 均为奇数时，$(-1)^m\cdot(-1)^n=1$，因而(1)式等于

$$\frac{2a^{m+n+2}}{m+n-2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi.$$

但此被积函数在对称区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上为奇函数，故积分仍然为零.

总之，当 m 和 n 中至少有一个为奇数时，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dxdy = 0.$$

3978. 求：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy,$$

其中 $f(x,y)$ 为连续函数.

解 利用积分中值定理，即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy$$

$$= f(\xi,\eta)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} dxdy = \pi\rho^2\cdot f(\xi,\eta),$$

其中点(ξ,η)为圆域$x^2+y^2\leqslant\rho^2$内的一点显然，当$\rho\to 0$时，点$(\xi,\eta)\to O(0,0)$. 于是，根据函数$f(x,y)$的连续性知：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy$$

$$=\lim_{\rho\to 0}f(\xi,\eta)=f(0,0).$$

3979. 设

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} e^{\frac{tx}{y^2}}dxdy,$$

求 $F'(t)$.

解 令 $x=ut, y=vt$，则

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} e^{\frac{tx}{y^2}}dxdy=\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} t^2e^{\frac{u}{v^2}}dudv. \qquad (1)$$

于是，似乎应该有

$$F'(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} 2te^{\frac{u}{v^2}}dudv$$

$$=\frac{2}{t}\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} t^2e^{\frac{u}{v^2}}dudv=\frac{2}{t}F(t)\quad(t>0).$$

但这是错误的. 实际上本题有问题，因为(1)式中的二重积分都是广义二重积分. 当$t>0$时，在$x>0, y=0$上(即$u>0, v=0$上)被积函数成为无穷，而且这个广义二重积分是发散的. 这是因为，根据被积函数的非负性，有(参看 §9)

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}} e^{\frac{u}{v^2}}dudv=\int_0^1 dv\int_0^1 e^{\frac{u}{v^2}}du$$

$$= \int_0^1 v^2(e^{\frac{1}{v^2}} - 1)dv. \tag{2}$$

对此积分，$v = 0$ 是瑕点，由于被积函数 $v^2(e^{\frac{1}{v^2}} - 1)$ 在 $0 \leqslant v \leqslant 1$ 上非负，且（令 $\frac{1}{v^2} = t$）

$$\lim_{v \to +0} v^2[v^2(e^{\frac{1}{v^2}} - 1)] = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t - 1}{t^2} = +\infty,$$

故瑕积分 $\int_0^1 v^2(e^{\frac{1}{v^2}} - 1)dv$ 发散，且

$$\int_0^1 v^2(e^{\frac{1}{v^2}} - 1)dv = +\infty.$$

由此，再根据(1)式与(2)式，得

$$F(t) \equiv +\infty(\text{当 } t > 0 \text{ 时}).$$

因此，提出求 $F'(t)$ 的问题是无意义的.

注意，若本题换为：设

$$F(t) = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ 0 \leqslant y \leqslant t}} e^{-\frac{tx}{y^2}} dxdy,$$

求 $F'(t)$. 这时得（作代换 $x = ut, y = vt$）

$$F(t) = t^2 \iint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}} dudv,$$

从而右端积分是收敛的，（实际上可视为常义积分）. 于是，

$$F'(t) = 2t \iint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}} dudv = \frac{2}{t} F(t) \ (t > 0).$$

3980+. 设

$$F(t) = \iint\limits_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leqslant 1} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy,$$

求 $F'(t)$.

解　作变量代换 $x=u+t, y=v+t$（t 固定），则

$$F(t)=\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}\,dudv. \quad (1)$$

今在积分号下求导数*)，得

$$F'(t)=\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}}dudv$$

$$=\iint_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$(-\infty<t<+\infty).$$

*）积分号下求导数的合理性，证明如下：令

$$f(u,v,t)=\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2},$$

则

$$f'_t(u,v,t)=\frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}}$$

$$((u,v)\neq(-t,-t)).$$

当 $(u,v)=(-t,-t)$ 时，易知 $f'_t(u,v,t)$ 不存在，但右导数存在且等于 $\sqrt{2}$，左导数也存在且等于 $-\sqrt{2}$。由于对任何数 a,b，有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，故 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，从而 $\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{2}$。于是，

$$|f'_t(u,v,t)|\leqslant\sqrt{2}\,((u,v)\neq(-t,-t)). \quad (2)$$

如果 $|t|>\frac{1}{\sqrt{2}}$，这时 $f(u,v,t)$，$f'_t(u,v,t)$（t 固定）都是域 $u^2+v^2\leqslant 1$ 上的连续函数，当然可在积分号下求导数，得

$$F(t)=\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}f'_t(u,v,t)dudv. \quad (3)$$

但如果 $|t| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$，则(3)式右端积分的被积函数 $f_t'(u,v,t)$ 在积分域 $u^2+v^2 \leqslant 1$ 中的点 $(u,v)=(-t,-t)$ 不连续. 因此，不能立即断定(3)式的正确性. 下面不论 t 为何值 $(-\infty<t<+\infty)$ 直接证明(3)式成立. 令

$$g(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,t)dudv \quad (-\infty<t<+\infty). \tag{4}$$

由(2)式知 $f_t'(u,v,t)$ 是有界的，且在域 $u^2+v^2\leqslant 1$ 上至多有一个不连续点(t 固定)，故(4)式右端的积分存在. 实际上，利用(2)式以及 $f_t'(u,v,t)$ 当 $(u,v)\neq(-t,-t)$ 时的连续性，用(必要时，即 $|t|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时)挖掉以点 $(-t,-t)$ 为中心的小圆域的方法，不难证明 $g(t)$ 是 $-\infty<t<+\infty$ 上的连续函数(详细证明留给读者). 令

$$G(t)=\int_0^t g(s)ds(-\infty<t<+\infty),$$

则

$$G'(t)=g(t)(-\infty<t<+\infty). \tag{5}$$

但

$$G(t)=\int_0^t ds\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,s)dudv$$

$$=\iiint\limits_{\substack{u^2+v^2\leqslant 1\\ 0\leqslant s\leqslant t}} f'_t(u,v,s)dudvds$$

$$= \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} dudv\int_0^t f'_t(u,v,s)ds. \qquad (6)$$

注意,(6)式中的运算是合理的,因为三维域 $u^2+v^2\leqslant 1, 0\leqslant s\leqslant t$($t$ 固定)中,三元函数 $f'_t(u,v,s)$ 有界且只在直线 $u=v=-s$ 的一段上不连续,从而(6)式中的三重积分及两个累次积分都存在,故它们相等.

下证恒有

$$\int_0^t f'_t(u,v,s)ds = f(u,v,t) - f(u,v,0). \qquad (7)$$

事实上,若 $(u,v)\neq(-t_1,-t_1)$($t_1\in[0,t]$)则 $f'_t(u,v,t)$ 是 $0\leqslant s\leqslant t$ 上的连续函数(u,v 固定),从而(7)式成立;若 $(u,v)=(-t_1,-t_1)$(t_1 是属于$[0,t]$的某数),则由 $f(u,v,s)$ 对任何 u,v,s 的连续性,有

$$\int_0^t f'_t(u,v,s)ds = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{t_1-\varepsilon} f'_t(u,v,s)ds$$
$$+\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{t_1+\varepsilon'}^t f'_t(u,v,s)ds$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}[f(u,v,t_1-\varepsilon)-f(u,v,0)]$$
$$+\lim_{\varepsilon'\to 0}[f(u,v,t)-f(u,v,t_1+\varepsilon')]$$
$$=f(u,v,t_1)-f(u,v,0)+f(u,v,t)-f(u,v,t_1)$$
$$=f(u,v,t)-f(u,v,0),$$

故(7)式恒成立.代入(6)式,得

$$G(t) = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}[f(u,v,t)-f(u,v,0)]dudv$$
$$= F(t)-F(0)\ (-\infty<t<+\infty).$$

由此,再注意到(5)式,即知 $F'(t)$ 存在,且

$$F(t) = G(t) = g(t)$$

$$= \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,t)dudv \quad (-\infty < t < +\infty),$$

即(3)式成立.

3981. 设

$$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)dxdy (t>0),$$

求 $F'(t)$.

解 令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$,则

$$F'(t) = \int_0^t dr\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi,$$

故得

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)td\varphi.$$

注意,此题中应假定 $f(x,y)$ 是连续函数.

3982. 设 $f(x,y)$ 是连续的,求证函数

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)d\eta$$

满足方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y).$$

证 利用含参变量的常义积分求导数的公式,得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi) - (-1)f(\xi,\xi-x+y)]d\xi$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-x+y}^{x+y-x} f(x,\eta)d\eta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi,x+y-\xi) + f(\xi,\xi-x+y)]d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\int_0^x [f'_y(\xi,x+y-\xi) - f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi$$

$$+ \frac{1}{2}[f(x,x+y-x) + f(x,x-x+y)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x [f_y'(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi - x + y)]d\xi$$
$$+ f(x,y).$$

同理，有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - f(\xi, \xi - x + y)]d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f_y'(\xi, \xi - x + y)]d\xi.$$

于是，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y),$$

证毕.

注意，显然本题还应假定 $f_y'(x,y)$ 存在且连续.

3983. 设函数 $f(x,y)$ 的等位线是简单封闭曲线，$S(v_1,v_2)$ 是由曲线 $f(x,y) = v_1$ 及 $f(x,y) = v_2$ 所围成的域. 证明

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)dxdy = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)dv,$$

其中 $F(v)$ 为由曲线 $f(x,y) = v_1$ 与 $f(x,y) = v_2$ 所包围的面积.

证 作 $[v_1,v_2]$ 的任一分划 T：

$$v_1 = v'_0 < v'_1 < \cdots < v'_i < \cdots < v'_n = v_2.$$

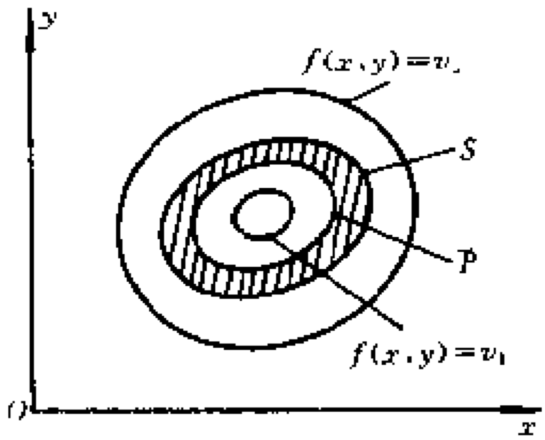

图 8.33

令 $d(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta v_i$，这里 $\Delta v_i=v'_i-v'_{i-1}(i=1,2,\cdots n)$. 于是，由积分中值定理（这里假定了 $f(x,y)$ 在 $S(v_1,v_2)$ 上连续）知

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)dxdy$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{S(v'_{i-1},v'_i)} f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\Delta S_i,$$

其中 ΔS_i 表小环形域 $S(v'_{i-1},v'_i)$（如图 8.33 阴影部分所示）的面积，$\bar{P}(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\in S(v'_{i-1},v'_i)$.

令 $v_i^*=f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$，则 $v'_{i-1}\leqslant v_i^*\leqslant v'_i$. 又显然（利用微分中值定理）有

$$\Delta S_i=F(v'_i)-F(v'_{i-1})=F'(\bar{v}_i)(v_i'-v'_{i-1})$$
$$=F'(\bar{v}_i)\Delta v_i(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $v'_{i-1}\leqslant\bar{v}_i\leqslant v'_i$. 这里我们假定了 $F'(v)$ 在 $[v_1,v_2]$ 上存在且可积，于是它有界，即

$$|F'(v)|\leqslant M=\text{常数}(v_1\leqslant v\leqslant v_2). \tag{1}$$

我们有

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}v_i^*F'(\bar{v}_i)\Delta v_i=I_1+I_2, \tag{2}$$

其中

$$I_1=\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_iF'(\bar{v}_i)\Delta v_i,\quad I_2=\sum_{i=1}^{n}(v_i^*-\bar{v}_i)F'(\bar{v}_i)\Delta v_i.$$

由于 $F'(v)$ 在 $[v_1,v_2]$ 上可积，故 $vF'(v)$ 也在 $[v_1,v_2]$ 上可积. 因此，

$$\lim_{d(T)\to 0} I_1 = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i F'(\bar{v}_i)\Delta v_i$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)dv. \tag{3}$$

另一方面，由(1)式知

$$|I_2| \leqslant Md(T)\sum_{i=1}^{n}\Delta v_i = M(v_2 - v_1)d(T),$$

故

$$\lim_{d(T)\to 0} I_2 = 0. \tag{4}$$

现在(2)式两端令 $d(T)\to 0$ 取极限(注意，(2)式左端是常数)，并注意到(3)式与(4)式，即得

$$\iint_{S(v_1,v_2)} f(x,y)dxdy = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)dv.$$

证毕.

应当指出，正如上面所说的，本题应假定 $f(x,y)$ 在 $S(v_1,v_2)$ 上连续，而 $F'(v)$ 在$[v_1,v_2]$上存在并且可积.

§2. 面积的计算法

Oxy 平面上域 S 的面积由公式

$$S = \iint_S dxdy$$

所给出.

求下列曲线所界的面积:

3984. $xy=a^2, x+y=\frac{5a}{2}(a>0)$.

解 两曲线的交点为 $A(\frac{a}{2},2a)$ 和 $B(2a,\frac{a}{2})$(图 8.34),故所求面积为

$$S=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}dx\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5a}{2}-x}dy=\frac{15}{8}a^2-2a^2\ln 2.$$

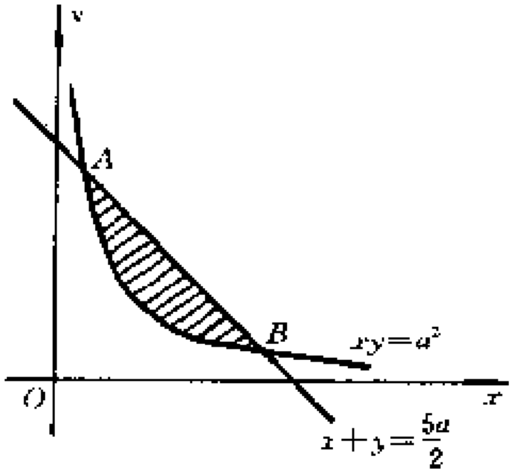

图 8.34

3985. $y^2=2px+p^2, y^2=-2qx+q^2(p>0,q>0)$.

解 两曲线的交点为 $A(\frac{q-p}{2},\sqrt{pq})$ 和 $B(\frac{q-p}{2},-\sqrt{pq})$(图 8.35),故所求面积为

$$S=2\int_0^{\sqrt{pq}}dy\int_{\frac{y^2-p^2}{2p}}^{\frac{q^2-y^2}{2q}}dx$$

$$=\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}.$$

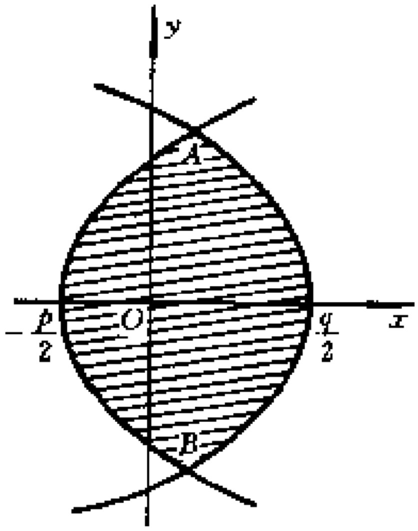

图 8.35

3986. $(x-y)^2+x^2=a^2$ $(a>0)$.

解 如图 8.36 所示.

所求面积的域为:

$-a\leqslant x\leqslant a$,

$x-\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant x+\sqrt{a^2-x^2}$. 于是，所求的面积为

$$S=\int_{-a}^{a}dx\int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}}dy$$

$$=4\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2tdt$$

$$=4\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi a^2.$$

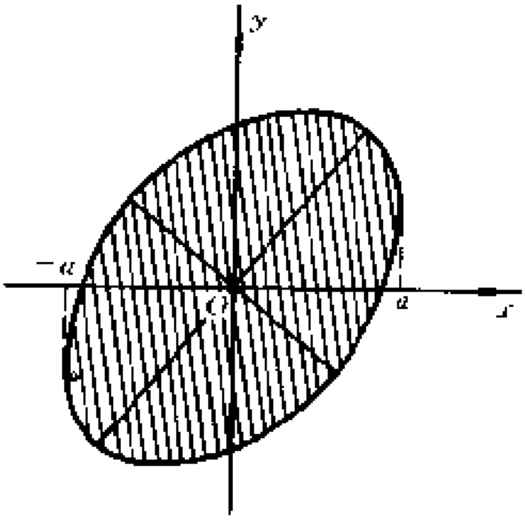

图 8.36

变换为极坐标，以计算由下列曲线所界的面积：

3987. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$；$x^2+y^2\geqslant a^2$.

解 曲线的极坐标方程为

$r^2=2a^2\cos2\varphi$ 及 $r\geqslant a$.

它们的交点(在第一象限内)为$(a,\frac{\pi}{6})$，如图 8.37 所示. 利用对称性，得所求面积为

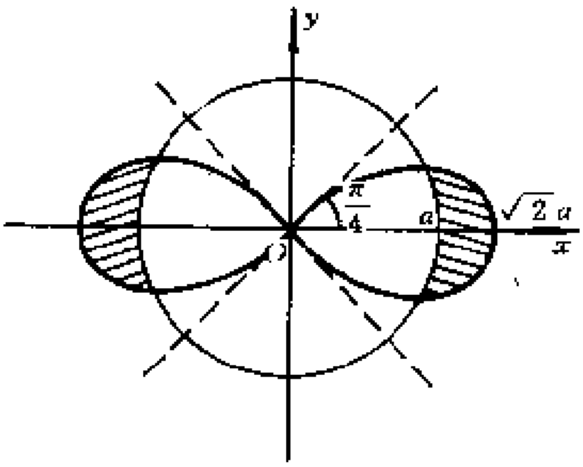

图 8.37

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_a^{\sqrt{2a^2\cos2\varphi}}rdr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2a^2\cos2\varphi-a^2)d\varphi$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2.$$

3988. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2; x\geqslant 0, y\geqslant 0.$

解 将方程化为极坐标方程，得

$$(r^3\cos^3\theta)+\gamma^3\sin^3\theta)^2=r^2,$$

即

$$r^2=\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}).$$

曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_S r dr d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}.$$

由于

$$\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}\right),$$

又

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\frac{\theta+\frac{\pi}{4}}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}-\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta + \cos\theta}{1 - \sin\theta\cos\theta} d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)}{2\left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2}}^{*)}$$

$$= 2\operatorname{arctg}(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

于是,所求的面积为

$$S = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta + \cos\theta} + \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta + \cos\theta}{1 - \sin\theta\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{6}.$$

*) 利用 2053 题的结果,其中

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}, A = 2, B = 0.$$

3989. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)(a > 0)$.

解 显然曲线关于 Ox 轴对称,故只要求出 $y \geqslant 0$ 的部分.化为极坐标,方程为

$$r = a\cos\theta(4\cos^2\theta - 3).$$

由于必须 $x^3 - 3xy \geqslant 0$,故 $\cos\theta(4\cos^2\theta - 3) \geqslant 0$.因此,$\cos\theta \geqslant 0$ 且 $\cos\theta \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\theta \leqslant 0$ 且 $\cos\theta \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 $-\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$,$\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{\pi}{6}$,$-\pi + \frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant -\frac{\pi}{2}$.

于是,在 Ox 轴的上方部分($y \geqslant 0$)为

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ 和 } \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{\pi}{6}.$$

由此可知

$$S = \iint_S r\,dr\,d\theta = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{\pi}{6}} r^2 d\theta\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta.$$

在上式右端第二个积分中作代换 $\theta = \pi - \varphi$,则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta,$$

故

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (16\cos^6\theta - 24\cos^4\theta + 9\cos^2\theta) d\theta$$

$$= a^2\left(16 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - 24 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + 9 \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}.$$

3990. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$; $(x - a)^2 + (y - a)^2 \leqslant a^2 (a > 0)$.

解 将方程化为极坐标方程,得(双纽线)

$$r^4 = 8a^2r^2\cos\theta\sin\theta,$$

即

$$r = 2a\sqrt{\sin 2\theta};$$

与圆周

$$(r\cos\theta - a)^2 + (r\sin\theta - a)^2 = a^2,$$

即

$$r = a(\cos\theta + \sin\theta) \pm a\sqrt{\sin 2\theta}.$$

显然，两条曲线关于射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 是对称的. 令

$$2a\sqrt{\sin 2\theta} = a(\cos\theta + \sin\theta) - a\sqrt{\sin 2\theta},$$

解得交点的极角

$$\theta = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}.$$

于是，所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_S r dr d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \{(2a\sqrt{\sin 2\theta})^2 - [a(\cos\theta + \sin\theta) \\ &\qquad - a\sqrt{\sin 2\theta}]^2\} d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} [2a^2 \sin 2\theta + 2a^2(\sin\theta + \cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta} \\ &\qquad - a^2] d\theta. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\int (\sin\theta + \cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2}(\sin\theta - \cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta} \\ &\quad + \frac{1}{2}\arcsin(\sin\theta - \cos\theta) + C^{*)}. \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned} S &= a^2[-\cos 2\theta + (\sin\theta - \cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta} \\ &\qquad + \arcsin(\sin\theta - \cos\theta) - \theta]\Big|_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= a^2\Big(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{8} + \frac{\sqrt{14}}{4}\sqrt{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

$$+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\Big\}$$

$$=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)^{**)}.$$

*）利用三角恒等式

$$\sqrt{\sin2x}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2x}\right)\sqrt{\mathrm{tg}x},$$

$$\sqrt{\sin2x}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2x}\right)\sqrt{\mathrm{ctg}x}$$

化为二项型微分的积分，参看 А. Ф. Тимофеев《ИНТЕТРИРОВАНИЕФХУ НКЦИИ》第五章 §15.

**）容易证明：

$$\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}=\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

事实上，我们有

$$\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{14}}{32}+\frac{5\sqrt{14}}{32}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

根据公式

$$x=ar\cos^\alpha\varphi,y=br\sin^\alpha\varphi(r\geqslant0)$$

引入普遍的极坐标（其中 a,b 和 α 为以适当的方法选出的常数，且 $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$），以求由下列曲线所界的面积（假定参数是正的）：

3991. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$.

解 不失一般性，设 $k>0, h>0$. 令

$$x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r=\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\sin\varphi.$$

由于 $r\geqslant 0$，故有

$$\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\sin\varphi\geqslant 0,$$

因此，首先必须 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 同时，应有 $\cos\varphi\geqslant 0$ 且 $\operatorname{tg}\varphi\geqslant-\frac{ak}{bh}$ 或者 $\cos\varphi<0$ 且 $\operatorname{tg}\varphi\leqslant-\frac{ak}{bh}$.

从而，极角 φ 应满足不等式

$$-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}\leqslant\varphi\leqslant\pi-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}.$$

于是，曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_{S} abr\,dr\,d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}^{\pi-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}\left(\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\sin\varphi\right)^2 d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\int_{-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}^{\pi-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}\sin^2(\varphi+\alpha_0)d\varphi,$$

其中 $\alpha_0=\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}$. 从而，我们有

$$S=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\left[\frac{\varphi+\alpha_0}{2}-\frac{1}{4}\sin 2(\varphi+\alpha_0)\right]\Bigg|_{-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}^{\pi-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

3992. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}; x=0\ y=0.$

解 令

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

于是,曲线所界的面积为

$$S = \iint_S abr\,dr\,d\theta = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4\cos^4\varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^4\sin^4\varphi + 2\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}d\varphi.$$

根据 И. М. 雷日克、И. С. 格拉德什坦编著的《函数表与积分表》2.125、2.126 知:

$$\int \frac{\cos^4\varphi d\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2} = \int \frac{1}{(1 + \mathrm{tg}^3\varphi)}d(\mathrm{tg}\varphi)$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\varphi}{3(1 + \mathrm{tg}^3\varphi)} + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(\mathrm{tg}\varphi + 1)^2}{\mathrm{tg}^2\varphi - \mathrm{tg}\varphi + 1}\right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}\varphi - 1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

从而

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4\cos^4\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4\left\{\frac{\mathrm{tg}\varphi}{3(1 + \mathrm{tg}^3\varphi)} + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(\mathrm{tg}\varphi + 1)^2}{\mathrm{tg}^2\varphi - \mathrm{tg}\varphi + 1}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}\varphi - 1}{\sqrt{3}}\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{a}{h}\right)^4;$$

又

$$\int \frac{\sin^4\varphi d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2} = \int \frac{\operatorname{tg}^4\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)} - \frac{2}{3}\int \frac{\operatorname{tg}^4\varphi}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)} - \frac{2}{3}\left\{\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^2}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}\varphi+1}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi-1}{\sqrt{3}}\right)\right\} + C,$$

从而

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4\sin^4\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^4\left\{\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)} - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{3}\right.$$

$$- \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^2}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}\varphi+1}\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b}{k}\right)^4;$$

此外，还有

$$\int \frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2} = \int \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$= -\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)} + C,$$

从而

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$=ab\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{ab}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2.$$

于是,曲线所界的面积为

$$S=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{a}{h}\right)^4+\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b}{k}\right)^4+\frac{ab}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2$$

$$=\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right].$$

3993. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\ (x>0,\ y>0).$

解 方法一

令

$$x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r^2=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是,曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_S abr\,dr\,d\varphi=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi.$$

注意到

$$\int\frac{\cos^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi=\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^4}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}+C,$$

$$\int \frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi = \int \frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{(1+\mathrm{tg}\varphi)^4}d(\mathrm{tg}\varphi)$$

$$= \int \frac{(\mathrm{tg}\varphi-1)(\mathrm{tg}\varphi+1)+1}{(1+\mathrm{tg}\varphi)^4}d(\mathrm{tg}\varphi)$$

$$= \int \frac{1}{(1+\mathrm{tg}\varphi)^2}d(\mathrm{tg}\varphi) - 2\int \frac{1}{(1+\mathrm{tg}\varphi)^3}d(\mathrm{tg}\varphi)$$

$$+ \int \frac{1}{(1+\mathrm{tg}\varphi)^4}d(\mathrm{tg}\varphi)$$

$$= -\frac{1}{1+\mathrm{tg}\varphi} + \frac{1}{(1+\mathrm{tg}\varphi)^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{(1+\mathrm{tg}\varphi)^3} + C,$$

于是,所求的面积为

$$S = \frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\mathrm{tg}\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$+ \frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{1+\mathrm{tg}\varphi} + \frac{1}{(1+\mathrm{tg}\varphi)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3(1+\mathrm{tg}\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$= \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

方法二

令

$$x = hr\cos\varphi, \quad y = kr\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r^2 = \frac{1}{\left(\frac{h}{a}\cos\varphi + \frac{k}{b}\sin\varphi\right)^4}$$

$$= \left[\frac{a^2b^2}{(hb)^2+(ka)^2}\right]^2 \frac{1}{\sin^4(\varphi+\alpha)}\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $\mathrm{tg}\alpha = \frac{hb}{ka}$. 于是,曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_{S} hkr\,dr\,d\varphi=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}$$

$$\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi+\alpha)}$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\left[-\frac{1}{6}\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin^3(\varphi+\alpha)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}\,{}^{*)}}$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\right]$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\cdot\frac{1}{6}\frac{[(hb)^2+(ka)^2]^{3\,**)}}{(hbka)^3}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

*）参看 2012 题的结果.

* *）由 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{hb}{ka}$ 知：

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{ka}{hb},\quad \sin\alpha=\frac{hb}{\sqrt{(hb)^2+(ka)^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{ka}{\sqrt{(hb)^2+(ka)^2}}.$$

3994. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^4=\dfrac{x^2}{h^2}-\dfrac{y^2}{k^2}\ (x>0,y>0).$

解 令

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r^2=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}.$$

由于

$$\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi\geqslant 0,$$

$$\left(\frac{ak}{bh}\right)^2\geqslant \mathrm{tg}^2\varphi,$$

注意到 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，可知极角的变化区间为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\mathrm{arctg}\,\frac{ak}{bh}.$$

于是，注意利用上题中两个不定积分，便得到曲线所界的面积为

$$S=\iint_S abr\,dr\,d\varphi=\frac{ab}{2}\int_0^{\mathrm{arctg}\frac{ak}{bh}}r^2d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\int_0^{\mathrm{arctg}\frac{ak}{bh}}\frac{\cos^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi$$

$$-\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\int_0^{\mathrm{arctg}\frac{ak}{bh}}\frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\mathrm{tg}\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\mathrm{arctg}\frac{ak}{bh}}$$

$$-\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{3\mathrm{tg}^2\varphi+3\mathrm{tg}\varphi+1}{(1+\mathrm{tg}\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\mathrm{arctg}\frac{ak}{bh}}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[\frac{-1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^3}+1\right]$$

$$+\frac{ab}{6}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[\frac{3\left(\frac{ak}{bh}\right)^2+3\left(\frac{ak}{bh}\right)+1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^3}-1\right]$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{(ak)^3+3(ak)^2bh+3ak(bh)^2}{(ak+bh)^3}$$

$$+\frac{ab}{5}\left(\frac{b}{k}\right)^2\frac{-(ak)^3}{(ak+bh)^3}$$

$$=\frac{a^4bk}{6h^2(ak+bh)^3}(a^2k^2+3akbh+2b^2h^2)$$

$$=\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}.$$

3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1;x=0,y=0.$

解 令

$$x=ar\cos^8\varphi,y=br\sin^8\varphi,$$

则方程化为

$$r=1(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}).$$

于是,曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_{S}8abr\cos^7\varphi\sin^7\varphi d\varphi$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^7\varphi d\varphi$$

$$=4ab\int_0^1u^7(1-u^2)^3du$$

$$=4ab\int_0^1(u^7-3u^9+3u^{11}-u^{13})du$$

$$=4ab\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{14}\right)$$

$$=\frac{ab}{70}.$$

进行适当的变量代换,求由下列曲线所界的面积:

3996. $x+y=a,x+y=b,y=\alpha x,y=\beta x$

$(0<a<b;0<\alpha<\beta).$

解 作变换:$x+y=u,\frac{y}{x}=v$,则$a\leqslant u\leqslant b,\alpha\leqslant v\leqslant$

β,且有

$$|I| = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

于是,所求的面积为

$$S = \int_a^b u\,du \int_\alpha^\beta \frac{dv}{(1+v)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

3997. $xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x (x > 0; y > 0)$.

解 作变换:$xy = u, \frac{y}{x} = v$,则 $a^2 \leqslant u \leqslant 2a^2, 1 \leqslant v \leqslant 2$,且有

$$|I| = \frac{1}{2v}.$$

于是,所求的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2} du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}a^2 \ln 2.$$

3998. $y^2 = 2px, y^2 = 2qx, x^2 = 2ry, x^2 = 2sy (0 < p < q; 0 < r < s)$.

解 作变换:$\frac{y^2}{x} = u, \frac{x^2}{y} = v$,则 $2p \leqslant u \leqslant 2q$,
$2r \leqslant v \leqslant 2s$,且有

$$|I| = \frac{1}{3}.$$

于是,所求的面积为

$$S = \frac{1}{3}\int_{2p}^{2q} du \int_{2r}^{2s} dv = \frac{4}{3}(q-p)(s-r).$$

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{4x}{a} = \frac{y}{b}$
$(a > 0, b > 0)$.

解 作变换:$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = u$, $\frac{x}{y} = v$,即

$$x=\frac{u^2v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},\quad y=\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2}.$$

则 $1\leqslant u\leqslant 2,\frac{a}{4b}\leqslant v\leqslant\frac{a}{b}$,且有

$$|I|=\frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

于是,所求的面积为

$$S=\int_1^2 2u^3du\int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}}\frac{dv}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}$$

$$=\frac{15}{2}\cdot\int_{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\frac{2atdt}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}\,{}^{*)}$$

$$=15a\int_{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3}-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+t\right)^4}\right]dt$$

$$=15a\cdot\left(\frac{7b}{72}-\frac{37b}{648}\right)=\frac{65ab}{108}.$$

*) 作代换 $v=at^2$.

4000. $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$,其中 λ 取下列各值:$\frac{1}{3}c^2,\frac{2}{3}c^2,\frac{4}{3}c^2,\frac{5}{3}c^2(x>0,y>0)$.

解 方程 $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$ 可变为

$$\lambda^2-(x^2+y^2+c^2)\lambda+c^2x^2=0.$$

将λ作为未知量解方程，不妨记方程的两个解为λ及μ，则

$$\lambda=\frac{x^2+y^2+c^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}{2},$$

$$\mu=\frac{x^2+y^2+c^2-\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}{2},$$

今设按上式作变量代换，将(x,y)变为(λ,μ). 易知

$$\left|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(x,y)}\right|=\frac{4c^2xy}{\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}{\lambda-\mu},$$

从而

$$\frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)}=\frac{1}{\dfrac{D(\lambda,\mu)}{D(x,y)}}$$

$$=\frac{\lambda-\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}dxdy=\iint\limits_{\substack{\frac{4c^2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{5c^2}{3}\\ \frac{c^2}{3}\leqslant\mu\leqslant\frac{2c^2}{3}}}\frac{\lambda-\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}d\lambda d\mu$$

$$=\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{u-v}{\sqrt{uv(1-v)(u-1)}}dudv$$

$$=\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{\sqrt{u}\,du}{\sqrt{u-1}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}}$$

$$-\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{du}{\sqrt{u(u-1)}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{1-v}}.$$

由于

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u-1}}du=\frac{\sqrt{10}}{3}-\frac{2}{3}+\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{du}{\sqrt{u(u-1)}}=2\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}}dv=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},$$

故最后得

$$\begin{aligned}S&=\frac{c^2}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{10}}{3}-\frac{2}{3}+\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\right.\\&\quad\left.\cdot\left(2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]\\&\quad-\frac{c^2}{4}\left[\left(2\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right.\right.\\&\quad\left.\left.-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]\\&=\frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\arcsin\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

4001. 求由椭圆

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$$

(其中 $\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$) 所界的面积，

解 作变换：$a_1x+b_1y+c_1=u, a_2x+b_2y+c_2=v$，

则椭圆所围成的域变为 $u_2 + v_2 \leqslant 1$，且有

$$|I| = \frac{1}{|\delta|}.$$

于是，所求的面积为

$$S = \frac{1}{|\delta|} \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} du dv = \frac{\pi}{|\delta|}.$$

4002. 求由椭圆

$$\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2 u} - \frac{y^2}{\mathrm{sh}^2 u} = c^2 (u = u_1, u_2)$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = c^2 (v = v_1, v_2)$$

$$(0 < u_1 < u_2; 0 < v_1 < v_2; x > 0, y > 0)$$

所界的面积.

解 作变换：$x = c\ \mathrm{ch} u \cos v, y = c\ \mathrm{sh} u \sin v$，

则有

$$|I| = |c^2 \mathrm{ch}^2 u - c^2 \cos^2 v|.$$

因为 $\mathrm{ch}^2 u \geqslant 1 \geqslant \cos^2 v$，故所求的面积为

$$S = c^2 \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} (\mathrm{ch}2u - \cos^2 v) du dv$$

$$= c^2 \Big[(v_2 - v_1) \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \mathrm{ch}^2 u}{2} du - (u_2 - u_1) \cdot \int_{v_1}^{v_2} \cos^2 v dv \Big]$$

$$= \frac{c^2}{4} \big[(v_2 - v_1)(\mathrm{sh}2u_2 - \mathrm{sh}2u_1) - (u_2 - u_1) \cdot (\sin 2v_2 - \sin 2v_1) \big].$$

4003. 求用平面 $x + y + z = b$ 与曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$ 相截所得截断面之面积.

解 为简化平面和曲面的方程，作变量代换：

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z,$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z,$$

这是一个正交变换，故 $Ox'y'z'$ 成为一新的直角坐标系. 在新的坐标系下，平面方程为

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z) = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

由于

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$y = \frac{-\sqrt{6}}{3}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

故有

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz &= \frac{1}{2}[(x - y)^2 \\ &\quad + (y - z)^2 + (z - x)^2] \\ &= \frac{3}{2}(x'^2 + y'^2). \end{aligned}$$

从而，曲面方程变为

$$x'^2 + y'^2 = \frac{2}{3}a^2.$$

于是，所求的面积为

$$S = \iint\limits_{x'^2+y'^2\leqslant\frac{2}{3}a^2} dx'\,dy' = \frac{2}{3}\pi a^2.$$

4004. 求用平面 $z = 1 - 2(x+y)$ 与曲面 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ 相截所得截断面之面积.

解 平面被曲面所截部分记为 S,它在 Oxy 平面上的投影记为 D. 由于平面 $z = 1 - 2(x+y)$ 的法线之方向余弦为 $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{2}{3}$,$\cos\gamma = \frac{1}{3}$,故 $D = S\cos\gamma = \frac{1}{3}S$,从而 $S = 3D$,显然 D 为 Oxy 平面上由曲线 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{1-2(x+y)} = 0$(也即 $2x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$)所界的区域. 作变量代换

$$x = u + v + \frac{1}{7}, \quad y = u - v + \frac{1}{7}.$$

于是,$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -2$,且曲线 $2x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$ 变为 $7u^2 + v^2 - \frac{1}{7} = 0$,这是一个椭圆(在 uv 平面上). 从而,即得

$$D = \iint\limits_D dxdy = 2\iint\limits_{49u^2+7v^2\leqslant1} dudv$$

$$= 2\cdot\pi\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{2\pi}{7\sqrt{7}}.$$

由此,最后得

$$S = 3D = \frac{6\pi}{7\sqrt{7}}.$$

§ 3. 体积的计算法

设柱体上顶是连续的曲面 $z = f(x,y)$，下底是平面 $z = 0$，侧面为从平面 Oxy 中的可求面积的区域 Ω(图 8.38) 竖起的垂直柱面所界定.

柱体的体积等于

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)dxdy,$$

4005. 试绘出一物体，其体积等于积分

$$V = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2 + y^2)dy.$$

解 积分域为三角形

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x.$$

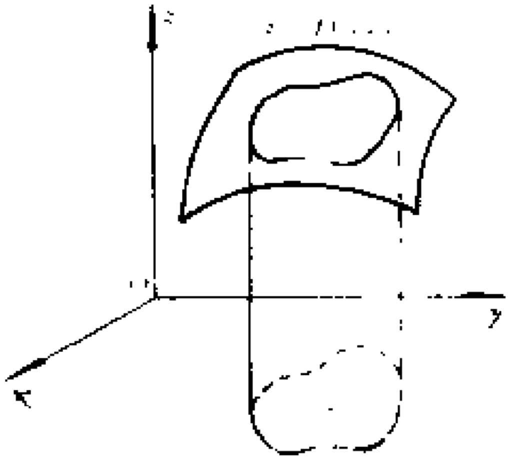

图 8.38

柱体上顶为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$. 物体的形状如图 8.39 所示.

4006. 描出下列二重积分所表示的体积：

(a) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\, y\geqslant 0}} (x + y)dxdy$;

(б) $\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dxdy$;

(в) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (x^2-y^2)\,dxdy$;

(г) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$;

(д) $\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}} \sqrt{xy}\,dxdy$;

(е) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

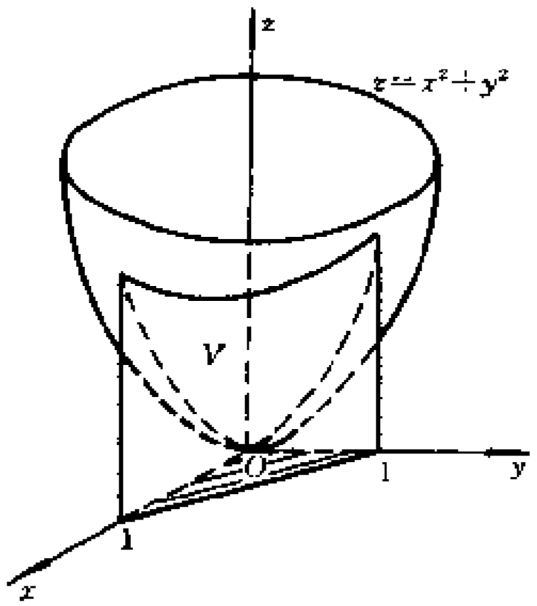

图 8.39

解 (a) 积分域为三角形

$$0\leqslant x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0.$$

柱体的上顶为平面 $z=x+y$(图 8.40).

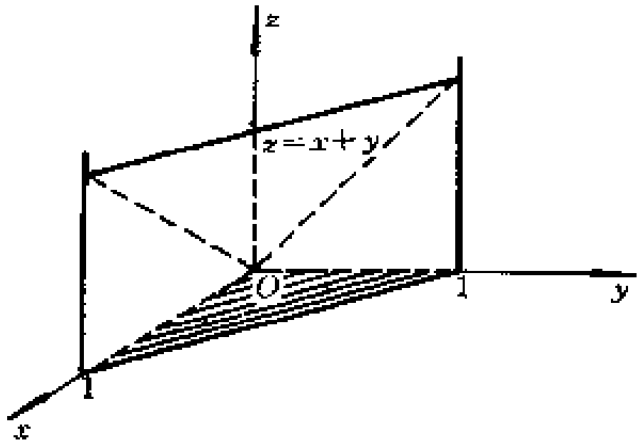

图 8.40

(б) 积分域为椭圆

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1,$$

即立体的底面，顶面为椭球面 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$(图 8.41).

(в) 积分域为由直线

$$x+y=1, x+y=-1, x-y=1, y-x=1$$

围成的正方形. 柱体的顶面为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$. 图 8.42 中仅画了第一卦限部分的体积.

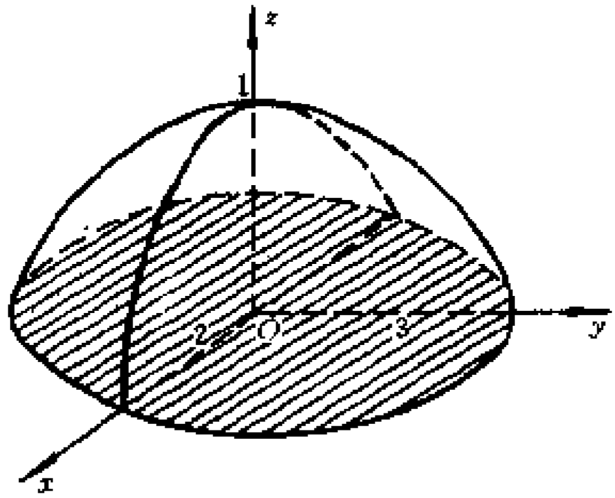

图 8.41

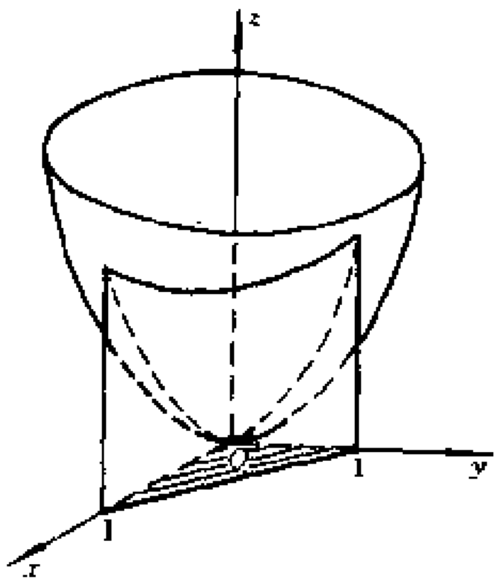

图 8.42

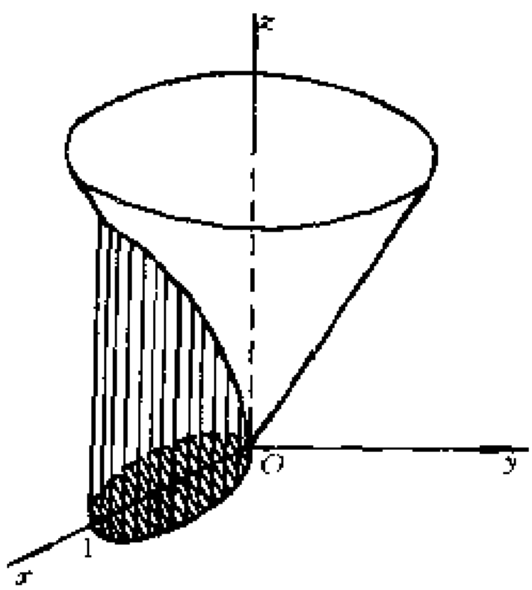

图 8.43

(г) 积分域为圆 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}$. 柱体的顶面为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$(图 8.43).

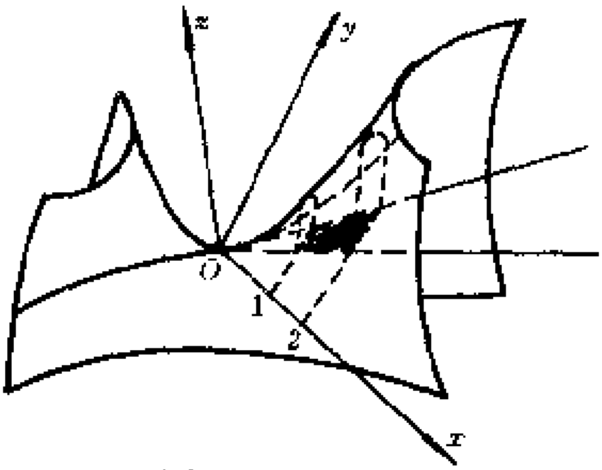

图 8.44

(д) 积分域为梯形 $1\leqslant x\leqslant 2, x\leqslant y\leqslant 2x$. 柱体的顶面为双曲抛物面 $z=\sqrt{xy}$(图 8.44).

(e) 积分域为圆

$$x^2+y^2\leqslant 1.$$

即立体的底面,顶面是由正弦曲线 $z=\sin\pi x$ 绕 Oz 轴旋转一周而得的旋转曲面(图 8.45).

求由下列曲面所界的体积:

4007. $z=1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0$.

解 $V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1+x+y)dy$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}-x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{5}{6}.$$

4008. $x+y+z=a, x^2+y^2=R^2, x=0, y=0, z=0 (a\geqslant R\sqrt{2})$.

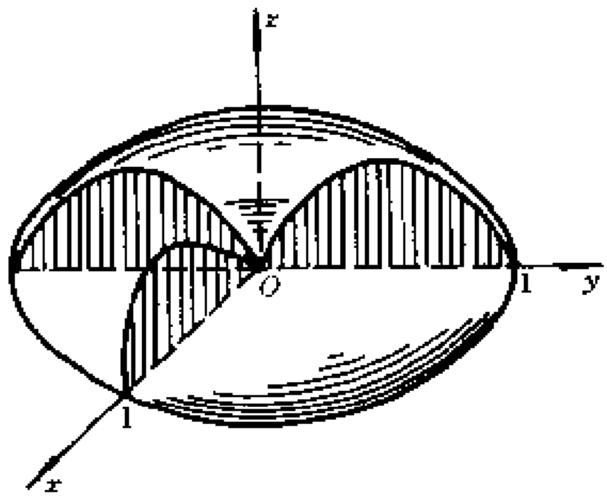

图 8.45

解 $V=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}(a-x-y)dy$

$$=\int_0^R\left[(a-x)\sqrt{R^2-x^2}-\frac{R^2-x^2}{2}\right]dx$$

$$=\int_0^R a\sqrt{R^2-x^2}dx-\int_0^R\left(x\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2-x^2}{2}\right)dx=\frac{\pi aR^2}{4}-\frac{2R^3}{3}.$$

4009. $z=x^2+y^2, y=x^2, y=1, z=0$.

解 $V=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1(x^2+y^2)dy=\frac{88}{105}$.

4010. $z=\cos x\cos y, z=0, |x+y|\leqslant\frac{\pi}{2}, |x-y|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

解 因函数 $z=\cos x\cdot\cos y$ 的图形关于 Oyz 平面对称，而积分域（图 8.46）. 关于 Oy 轴对称，故所求的体积为

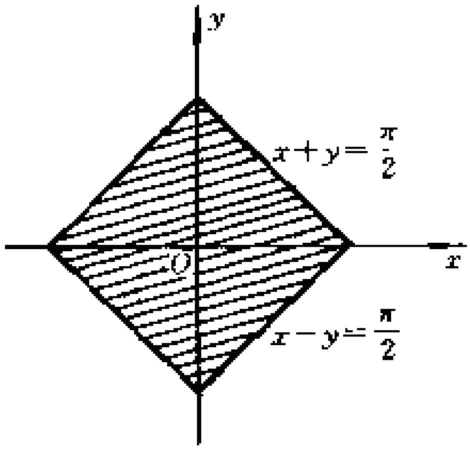

图 8.46

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\cos x\cdot\cos y\,dy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

$$=4\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

4011. $z=\sin\dfrac{\pi y}{2x}, z=0, y=x, y=0, x=\pi.$

解 $V=\displaystyle\int_0^{\pi}dx\int_0^{x}\sin\frac{\pi y}{2x}dy=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi.$

4012. $z=xy, x+y+z=1,$ $z=0.$

解 体积 V 由两部分组成：

V_1: $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant\dfrac{1-x}{1+x}, z=xy.$

V_2: $0\leqslant x\leqslant 1, \dfrac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x, z=1-x-y.$

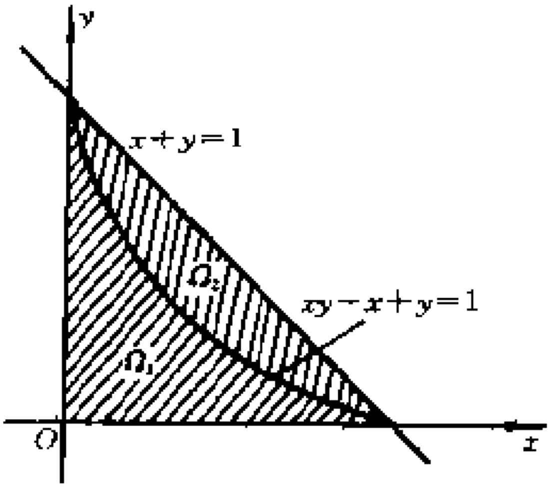

图 8.47

它们在Oxy平面上的射影域Ω_1及Ω_2如图8.47所示. 于是,所求的体积为

$$V=V_1+V_2$$
$$=\int_0^1 xdx\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} ydy$$
$$+\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)dy$$
$$=\left(-\frac{11}{4}+4\ln 2\right)$$
$$+\left(\frac{25}{6}-6\ln 2\right)$$
$$=\frac{17}{12}-2\ln 2.$$

变换成极坐标,以求由下列曲面所界的体积:

4013. $z^2=xy, x^2+y^2=a^2$.

解 因为$z=\sqrt{xy}$,故所求的体积为

$$V=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\sqrt{xy}dxdy$$
$$=4\int_0^a dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\cdot r^2 d\varphi$$
$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\sin^{\frac{1}{2}}\varphi d\varphi$$
$$=\frac{4}{3}a^3\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)^{*)}=\frac{2}{3}a^3\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$
$$=\frac{2}{3}a^3\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}a^3\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

*）利用 3856 题的结果.

4014. $z = x + y, (x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = 0 (x > 0, y > 0)$.

解 令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$，则方程

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy \text{ 及 } z = x + y$$

变为

$$r^2 = 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi \text{ 及 } z = r(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

于是，所求的体积为

$$V = \iint\limits_{\Omega} (x + y) dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2 (\cos\varphi + \sin\varphi) dr$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{\frac{5}{2}}\varphi\cos^{\frac{3}{2}}\varphi + \cos^{\frac{5}{2}}\varphi\sin^{\frac{3}{2}}\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot B\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)^{*)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2!}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

*）利用 3856 题的结果.

4015. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$.

解 令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$，则方程

$$x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x \text{ 及 } z = x^2 + y^2$$

变为

$$r = \cos\varphi, r = 2\cos\varphi \text{ 及 } z = r^2.$$

于是,所求的体积为

$$V = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^3 dr$$

$$= \frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16\cos^4\varphi - \cos^4\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{15}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{45}{32}\pi.$$

4016. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \geqslant a|x| (a > 0)$.

解 只须计算由下列曲面所围成的体积:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \leqslant a|x|.$$

若引用极坐标,则

$$r^2 + z^2 = a^2, r^2 \leqslant a|r\cos\varphi|,$$

其体积为

$$V_1 = 8 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \leqslant ax \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dx dy$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r \cdot \sqrt{a^2 - r^2} dr$$

$$= -\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16a^3}{9}.$$

于是,所求的体积为

$$V = \frac{4\pi a^3}{3} - \left(\frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16a^3}{9}\right) = \frac{16a^3}{9}.$$

4017. $x^2 + y^2 - az = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), z = 0 (a > 0)$.

解 若引用极坐标,则有

$$z = \frac{r^2}{a}, r^2 = a^2\cos 2\varphi (a > 0).$$

于是,利用对称性知,所求的体积为

$$V = 4\iint_{\Omega} \frac{1}{a}(x^2 + y^2)dxdy$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{r^2}{a} \cdot rdr$$

$$= a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{8}.$$

4018. $z = e^{-(x^2+y^2)}, z = 0, x^2 + y^2 = R^2$.

解 利用对称性,得所求的体积为

$$V = 4 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \leqslant R^2 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} rdr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

4019. $z = c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2 + y^2}}{2a}, x^2 + y^2 = a^2, y = x\operatorname{tg}\alpha, y = x\operatorname{tg}\beta (a > 0, c > 0, 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$.

解 所求的体积为

$$V = \iint_{\Omega} c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2 + y^2}}{2a}dxdy$$

$$= \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^a cr\cos\frac{\pi r}{2a}dr$$

$$= c(\beta-\alpha)\left[\frac{2ar}{\pi}\sin\frac{\pi r}{2a}+\frac{4a^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi r}{2a}\right]\Bigg|_0^a$$

$$= 2a^2c(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}\right)$$

$$= \frac{2a^2c(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}.$$

4020. $z = x^2 + y^2, z = x + y.$

解 立体的射影域的围线为 $x^2 + y^2 = x + y$ 或 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. 若引用代换 $x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$, 则有

$$z = r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi), z = 1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

$$\left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是,所求的体积为

$$V = \iint\limits_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}}[(x+y)-(x^2+y^2)]dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big\{[1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]$$

$$-\left[r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\Big\}rdr$$

$$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-r^2\right)rdr = \frac{\pi}{8}.$$

求由下列曲面所界的体积(假定参数是正的):

4021. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}(z>0).$

解 曲面的交线在 Oxy 平面上的射影为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

$=\frac{1}{2}$. 令 $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$,则方程化为

$z=c\sqrt{1-r^2}$ 及 $z=cr(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}})$.

于是,曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}\left[c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right]dxdy.$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}abr(c\sqrt{1-r^2}-cr)dr$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r\sqrt{1-r^2}-r^2)dr$$

$$=-\frac{1}{3}abc\int_0^{2\pi}\left[r^3-(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2}).$$

4022. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$,则曲面方程化为

$z=\pm c\sqrt{1+r^2}(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1)$.

于是,曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}2c\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 2abcr\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=\frac{4\pi}{3}abc(2\sqrt{2}-1).$$

4023. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},z=0.$

解 立体在 Oxy 平面上的射影域的界线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，即 $\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. 若令 $\frac{x}{a}=\frac{1}{2}+r\cos\varphi,\frac{y}{b}=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right]$$

$$\left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}} c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right]dr$$

$$=abc\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{16}\right]d\varphi$$

$$=abc\cdot\frac{3\cdot 2\pi}{16}=\frac{3}{8}\pi abc.$$

4024. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1,z=0.$

解 若令 $x=ar\cos\varphi,y=br\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c(1-r^4)(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} c\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right]dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abcr(1 - r^4)dr = \frac{2}{3}\pi abc.$$

4025. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

解 下面计算位于第一卦限部分的体积.

令 $x = ar\cos^2\varphi, y = br\sin^2\varphi$,则方程化为

$$z = c\sqrt{1 - r^2} \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1\right).$$

于是,曲面所界的体积为

$$V = \iint_{\Omega} c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2} dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 abc\sin 2\varphi \cdot \sqrt{1 - r^2} rdr$$

$$= abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{1 - r^2} dr\right)$$

$$= \frac{abc}{3}.$$

4026. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$

解 令

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$z = \pm c\sqrt{1 - r^2},$$

$$r^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$= \cos 2\varphi \left(\text{因 } r^2 = \cos 2\varphi \geqslant 0, \right.$$

$$\left. \text{故} -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{4}\right).$$

于是,利用对称性知,曲面所界的体积为

$$V = 8c\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{1-r^2}rdrd\varphi$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}(1-\sqrt{8}\sin^3\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{8abc}{3}\left(\varphi+\sqrt{8}\cos\varphi-\frac{\sqrt{8}}{3}\cos^3\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8abc}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= \frac{2abc}{9}(3\pi+20-16\sqrt{2}).$$

4027. $z^2 = xy, x+y=a, x+y=b (0<a<b)$.

解 由于 $z=\pm\sqrt{xy}$，又所界立体在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由直线 $x+y=a, x+y=b, x=0$ 及 $y=0$ 围成. 于是，利用对称性知，曲面所界的体积为

$$V = 2\iint\limits_{\Omega}\sqrt{xy}dxdy$$

$$= 2\left(\int_0^a dx\int_{a-x}^{b-x}\sqrt{xy}dy+\int_a^b dx\int_0^{b-x}\sqrt{xy}dy\right)$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^a\left[\sqrt{x(b-x)^3}-\sqrt{x(a-x)^3}\right]dx$$

$$+\frac{4}{3}\int_a^b\sqrt{x(b-x)^3}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}dx$$

$$-\frac{4}{3}\int_0^a(a-x)\sqrt{a(a-x)}dx.$$

令 $x=b\sin^2t$，可得

$$\int_0^b (b-x)\sqrt{x(b-x)}dx$$
$$=2b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t dt$$
$$=2b^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t dt\right)$$
$$=2b^3\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}\pi b^3;$$

同理，有

$$\int_0^a (a-x)\sqrt{x(a-x)}dx=\frac{1}{16}\pi a^3.$$

于是，所求的体积为

$$V=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi b^3}{16}-\frac{\pi a^3}{16}\right)=\frac{\pi}{12}(b^3-a^3).$$

4028. $z=x^2+y^2, xy=a^2, xy=2a^2, y=\frac{x}{2}, y=2x, z=0.$

解 曲面所界的立体在Oxy平面上的射影域Ω由曲线$xy=a^2$、$xy=2a^2$和直线$y=\frac{x}{2}$、$y=2x$围成．利用对称性，曲面所界体积可表示为

$$V=2\iint_{\Omega} z dxdy=2\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy.$$

作变量代换

$$xy=ua^2, y=vx,$$

则积分域Ω变为长方形域

$$1\leqslant u\leqslant 2, \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2,$$

且 $|I|=\frac{a^2}{2v}$, $z=x^2+y^2=a^2(\frac{u}{v}+uv)$.

于是，所求的体积为

$$V = 2\iint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2)dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{\substack{1\leqslant u\leqslant 2\\ \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2}} a^2\left(\frac{u}{v} + uv\right)\frac{a^2}{2v}dudv$$

$$= a^4\int_1^2 udu\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)dv = \frac{9}{2}a^4.$$

4029. $z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0.$

解 曲面所界立体 V 在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由曲线 $x^2 = y$、$x^2 = 2y$、$y^2 = x$ 及 $y^2 = 2x$ 围成.

我们有

$$V = \iint\limits_{\Omega} zdxdy = \iint\limits_{\Omega} xydxdy.$$

作变量代换

$$x = uy^2, y = vx^2,$$

或

$$x = u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}, y = u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}},$$

则积分域 Ω 变为正方形域

$$\frac{1}{2}\leqslant u\leqslant 1, \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 1,$$

且 $|I| = \frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}$. 于是,曲面所界的体积为

$$V = \iint\limits_{\Omega} xydxdy = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-3}v^{-3}dudv$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-3}du\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

4030. $z = c\sin\dfrac{\pi xy}{a^2}, z = 0, xy = a^2, y = \alpha x, y = \beta x (0 < \alpha < \beta; x > 0)$.

解 曲面所界的立体在Oxy平面上的投影域Ω由曲线$xy = a^2$和直线$y = \alpha x, y = \beta x (x > 0)$围成. 于是,曲面所界的体积为

$$V = \iint\limits_{\Omega} z dx dy = c\iint\limits_{\Omega} \sin\frac{\pi xy}{a^2} dx dy.$$

作变量代换$x = ar\cos\varphi, y = ar\sin\varphi$,则$|I| = a^2 r$.

于是,

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{\Omega} z dx dy = c\iint\limits_{\Omega} \sin\frac{\pi xy}{a^2} dx dy \\ &= a^2 c\int_{\operatorname{arctg}\alpha}^{\operatorname{arctg}\beta}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}} \sin(\pi r^2 \sin\varphi\cos\varphi) r dr d\varphi \\ &= \frac{a^2 c}{\pi}\int_{\operatorname{arctg}\alpha}^{\operatorname{arctg}\beta} \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{a^2 c}{\pi} \ln \operatorname{tg}\varphi \Big|_{\operatorname{arctg}\alpha}^{\operatorname{arctg}\beta} = \frac{a^2 c}{\pi} \ln\frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

4031. $z = x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$.

解 曲面所界的立体在Oxy平面上的投影域Ω由直线$x + y = 1, x = 0, y = 0$围成. 于是,曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{\Omega} z dx dy = \iint\limits_{\Omega} \left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right) dx dy \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x} \left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}}(1 - x) + \frac{2}{5}(1 - x)^{\frac{5}{2}}\right] dx \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1 - \frac{1}{35}(1 - x)^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{8}{35}.$$

4032. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, z = 0.$

解 令

$$x = ar\cos^3\varphi, y = br\sin^3\varphi,$$

则方程化为

$$z = c[1 - r^2(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi)],$$

$$r = 1 \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

于是，利用对称性知，曲面所界的体积为

$$V = 4\iint_{\Omega} z dx dy$$

$$= 12abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 [1 - r^2(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi)] \cdot r\cos^2\varphi\sin^2\varphi dr d\varphi$$

$$= 12abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6\varphi + \sin^6\varphi)\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\right)$$

$$= 6abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\right)$$

$$= 6abc\left[\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{10} \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{3\pi abc}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{105}{1920}\right) = \frac{75}{256}\pi abc.$$

4033. $z = c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} = a\operatorname{arctg}\frac{y}{x} (y \geqslant 0).$

解 令

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,$$

则方程化为

$$z = c\varphi,$$

$$r = a\varphi\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

于是，曲面所界的体积为

$$V = \iint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\varphi} c\varphi r\,dr\,d\varphi$$

$$= \frac{a^2c}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi^3 d\varphi = \frac{a^2c}{8}\varphi^4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^4a^2c}{128}.$$

4034. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (n > 0).$

解 曲面方程可表示为

$$z = c\sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n}\right)}.$$

若令

$$x = ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi, y = br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

则曲面所界的体积为

$$V = c\iint\limits_{\Omega}\sqrt[n]{1 - (\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n})}\,dx\,dy$$

$$= \frac{2abc}{n}\int_0^1\sqrt[n]{1 - r^n}\,r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi\sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi\,d\varphi.$$

若令 $r^n = t$ 可得

$$\int_0^1\sqrt[n]{1 - r^n}\,r\,dr = \int_0^1(1 - t)^{\frac{1}{n}}t^{\frac{2}{n}-1}dt$$

$$= B\left(\frac{1}{n}+1,\frac{2}{n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{3}{n}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)};$$

令 $\sin^2\varphi = t$ 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi \sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi d\varphi = \frac{1}{2n}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

$$= \frac{1}{2n}\cdot B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

于是,所求的体积为

$$V = \frac{abc}{n^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

$$= \frac{abc}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

4035. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (n > 0, m > 0)$.

解 令

$$x = ar\cos^2\varphi, y = br\sin^2\varphi \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

则曲面所界的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= c\iint\limits_{\Omega}\sqrt[m]{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{n}}dxdy \\
&= 2abc\int_{0}^{1}\sqrt[m]{1-r^{n}}rdr\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi \\
&= abc\int_{0}^{1}\sqrt[m]{1-r^{n}}rdr \\
&= \frac{abc}{n}\int_{0}^{1}(1-t)^{\frac{1}{m}}t^{\frac{2-n}{n}}dt \\
&= \frac{abc}{n}\cdot B\left(\frac{1}{m}+1,\frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{abc}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}+1\right)} \\
&= \frac{abc}{n+2m}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}.
\end{aligned}
$$

§ 4. 曲面面积计算法

1° 曲面由显函数给出的情形　平滑曲面 $z=z(x,y)$ 的面积由积分

$$
S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2}}dxdy
$$

(其中 Ω 为已知曲面在 Oxy 平面上的射影) 所表出.

2° 曲面由参数方程给出的情形　若曲面的方程是用参数给出

$$
x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),
$$

其中 $(u,v)\in\Omega$, Ω 为封闭可求积的有界区域, 假定函数 x, y 和 z 为在域 Ω 内连续可微分的函数, 则对于曲面的面积有公式

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\,du dv,$$

其中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. 求曲面 $az = xy$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 内那部分的面积.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \iint_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{\frac{a^2 + (x^2 + y^2)}{a^2}}\,dxdy \\
&= \frac{1}{a}\iint_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)}\,dxdy \\
&= \frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r\sqrt{a^2 + r^2}\,dr \\
&= \frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

4037. 求由曲面 $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$ 所界物体的面积.

解 如图 8.48 所示.两曲面的交线在 Oyz 平面上的射影为圆

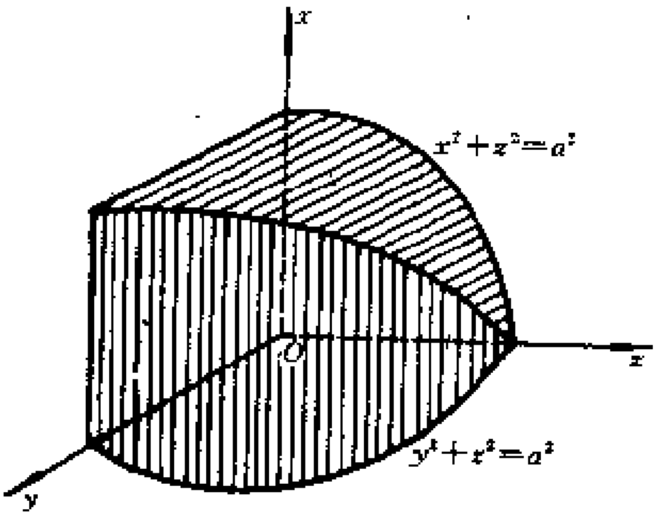

图 8.48

$$y^2+z^2=a^2, x=0.$$

于是,利用对称性知,所求的面积为

$$S=4\iint_{y^2+z^2\leqslant a^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz$$

$$=4\cdot 4\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{1+0^2+\left(-\frac{z}{x}\right)^2}dy$$

$$=16\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{\frac{x^2+z^2}{x^2}}dy$$

$$=16a\int_0^a dz\int_0^{a^2-z^2}\frac{dy}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

$$=16a\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}\cdot\sqrt{a^2-z^2}dz=16a^2.$$

4038. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($b\leqslant$

a）内那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

又积分域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$位于第一象限部分为

$$0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

于是，利用对称性知，所求的面积为

$$S=2.4\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy$$

$$=8a\int_0^a\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=8a^2\arcsin\frac{b}{a}.$$

4039. 求曲面$z^2=2xy$被平面$x+y=1,x=0,y=0$所截下那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x+y}{\sqrt{xy}},$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{x+y}{\sqrt{xy}}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 \Big[2\sqrt{x(1-x)}$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{x}}(1-x)\sqrt{1-x}\Big]dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\frac{2\sqrt{1-x}(1+2x)}{3\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{1-x}(1+2x)d(\sqrt{x})$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{1-t^2}(1+2t^2)dt$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4040. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱 $x^2+y^2=\pm ax$ 外那部分的面积(维维安尼问题).

解 只须求出球面被圆柱面割出部分的面积.因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

于是,利用对称性知,割出部分的面积为

$$S=8\iint\limits_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

因而,所求的面积为

$$A=4\pi a^2-S=4\pi a^2-8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8a^2.$$

4041. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{2},$$

又积分域为：$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi$，于是，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\sqrt{2}\,rdr$$

$$=2\sqrt{2}\int_{-\frac{2}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\cos^2\varphi d\varphi=2\pi.$$

4042. 求曲面 $z=x^2-y^2$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

又积分域由双纽线$r^2=a^2\cos 2\varphi$所围成，于是，利用对称性知，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{2}r\cdot\frac{r\cos\varphi}{r\sqrt{\cos 2\varphi}}dr$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}d\varphi$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}d(\sqrt{2}\sin\varphi)$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}d(\sqrt{2}\sin\varphi)$$

$$=2a^2\left[\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{2}\sin\varphi)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

4043. 求曲面$z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$被平面$x-y=\pm 1, x+y=\pm 1$所截那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$$

故所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

，其中Ω为由直线$x-y=\pm 1, x+y=\pm 1$围成的正方形域. 为例于计算，作变换

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}u-\frac{\sqrt{2}}{2}v, y=\frac{\sqrt{2}}{2}u+\frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

从而积分域变为由方程 $u=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, v=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 围成的正方形，且 $I=1$. 于是，注意利用对称性，即得所求的面积为

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}du\int_{-u}^{u}\sqrt{1+u^2+v^2}dv$$

$$=$$

$$4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left\{u\sqrt{1+2u^2}+\frac{1+u^2}{2}[ln(\sqrt{1+2u^2}+u)\right.$$

$$\left.-\ln(\sqrt{1+2u^2}-u)]\right\}du$$

$$=\frac{2}{3}(1+2u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}[\ln(\sqrt{1+2u^2}+u)$$

$$-\ln(\sqrt{1+2u^2}-u)]d\left(u+\frac{u^3}{3}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln3-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}4\left(u+\frac{u^3}{3}\right)$$

$$\cdot\frac{du}{\sqrt{1+2u^2}(1+u^2)}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln3-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1+\frac{u^2}{3}}{1+u^2}$$

$$\cdot\frac{d(1+2u^2)}{\sqrt{1+2u^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln3-\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2+5}{t^2+1}dt^{*)}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3 - \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

$$- \frac{8}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 + \frac{7}{4}\ln 3) + \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$$

$$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 + \frac{7\ln 3}{4}) + \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

*) 作代换 $1 + 2u^2 = t^2$.

4044. 求曲面 $x^2 + y^2 = 2az$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)},$$

又积分域由双纽线 $r^2 = a^2\sin 2\varphi$ 围成，于是，利用对称性，即得所求的面积为

$$S = \iint_\Omega \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)}\,dxdy$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + r^2}\,rdr$$

$$= \frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^3(1 + \sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} - a^3]d\varphi$$

$$= \frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi - \frac{\pi a^2}{3}.$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1 + \cos 2(\frac{\pi}{4} - \varphi)]^{\frac{3}{2}} d\varphi$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3(\frac{\pi}{4}-\varphi)d\varphi$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 tdt = 2\sqrt{2}(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{5}{3},$$

故最后得

$$S = \frac{4a^2}{3}\cdot\frac{5}{3} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9}(20-3\pi).$$

4045. 求曲面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $x+z=0, x-z=0$ ($x>0, y>0$) 所截那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

于是,所求的面积为

$$S = \iint_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdz$$

$$= \int_0^a dx\int_{-x}^{x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz$$

$$= \int_0^a \frac{2ax}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = 2a^2.$$

4046. 求由曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2, x+y+z=2a$ ($a>0$) 所界物体的表面积和体积.

解 曲面的交线在 Oxy 平面上的射影为

$$3x^2+3y^2=(2a-x-y)^2,$$

即

$$x^2 + y^2 - xy + 2a(x + y) = 2a^2.$$

令

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

则方程变为

$$\frac{\left(x' + \frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{3}a)^2} + \frac{y'^2}{(2a)^2} = 1.$$

由此可见，曲面所界的物体在 Oxy 平面上的射影域为以 $2a$ 为短半轴、$2\sqrt{3}a$ 为长半轴的椭圆.

物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成. 对于 $z = 2a - x - y, z = \sqrt{3x^2 - 3y^2}$ 分别有

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 2.$$

于是，物体的表面积

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_{\Omega} \sqrt{3}\, dxdy + \iint\limits_{\Omega} 2dxdy \\ &= (\sqrt{3} + 2) \cdot \pi \cdot 2a \cdot 2\sqrt{3}a \\ &= 4\pi(3 + 2\sqrt{3})a^2. \end{aligned}$$

又所截圆锥之高为

$$H = \left| \frac{-2a}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

(即坐标原点到平面 $x + y + z = 2a$ 的距离). 于是，物体的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

其中 A 为截圆锥的底面积：

$$A=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{3}\,dxdy=\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a$$

$$=12\pi a^2.$$

因此，所求物体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot 12\pi a^2\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3.$$

4047. 求球壳被包含在两条纬线和两条经线间那部分的面积.

解 球壳的参数方程为

$$x=R\cos\varphi\cos\psi,y=R\sin\varphi\cos\psi,z=R\sin\psi$$

其中 R 为球的半径. 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$=R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi=R^2\cos^2\psi,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2$$

$$=R^2\cos^2\varphi\sin^2\psi+R^2\sin^2\varphi\sin^2\psi+R^2\cos^2\psi$$

$$=R^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi}$$

$$=R^2\sin\varphi\cos\psi\cos\varphi\sin\psi-R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi$$

$$+0=0,$$

故

$$\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos\psi.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}R^2\cos\psi d\psi$$

$$=(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2,$$

其中 φ_1 及 φ_2 为经线的经度，ψ_1 及 ψ_2 为纬线的纬度.

4048. 求螺旋面

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = h\varphi,$$

其中 $0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi$ 那部分的面积.

解 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 + h^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

故

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

于是,所求的面积为

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2 + h^2}\, dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{r}{2}\sqrt{r^2 + h^2} + \frac{h^2}{2}\ln(r + \sqrt{r^2 + h^2})\right]\Bigg|_0^a$$

$$= \pi a\sqrt{a^2 + h^2} + \pi h^2 \ln\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}.$$

4049. 求环面

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi,$$

$$z = a\sin\psi (a < a \leqslant b)$$

被两条经线 $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ 和两条纬线 $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2$ 所界那部分的面积. 整个环的表面积等于什么?

解 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = (b + a\cos\psi)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = a^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \psi}$$

故

$$\sqrt{EG - F^2} = a(b + a\cos\psi)$$

于是,所求的面积为

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} a(b + a\cos\psi)d\psi$$

$$= a(\varphi_2 - \varphi_1)[b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)].$$

整个环的表面积

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} a(b + a\cos\psi)d\psi = 4\pi^2 ab.$$

4050. 求立体角 ω,在这个角里从坐标原点看得见矩形

$$x = a > 0, 0 \leqslant y \leqslant b, 0 \leqslant z \leqslant c.$$

若 a 很大,对于 ω 推出近似公式.

解 以原点为球心作单位球,则 ω 即为该球面含于四面体 $O - ABCD$ 内的面积,其中 $ABCD$ 是以 b、c 为边长的矩形(图 8.49).

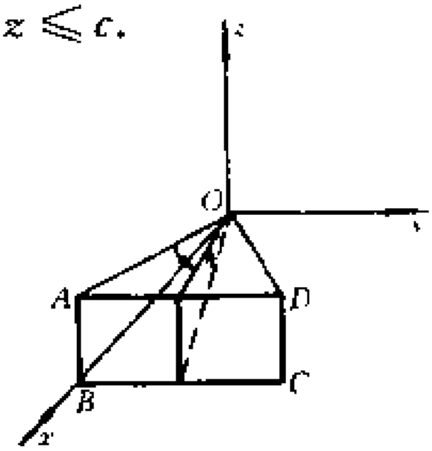

图 8.49

取球坐标系,由 4047 题知:

$$\sqrt{EG - F^2} = \cos\psi$$

又 φ 和 ψ 的变化域为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$0 \leqslant \psi \leqslant \arcsin\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2\cos^2\varphi}}.$$

于是，立体角

$$\omega = \int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} d\varphi \int_0^{\arcsin\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}} \cos\psi d\psi$$

$$= \int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}} d\varphi$$

$$= \int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{d\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\varphi\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\varphi\right)^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$= \arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}.$$

当 a 很大时，有

$$\frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}} = \frac{bc}{a^2\sqrt{\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}}$$

$$\doteq \frac{bc}{a^2},$$

于是，得 ω 的近似公式

$$\omega \doteq \frac{bc}{a^2}$$

§5. 二重积分在力学上的应用

$1°$ **重心** 若 x_0 和 y_0 为平面 Oxy 内薄板 Ω 的重心坐标，$\rho=\rho(x,y)$ 为薄板的密度，则

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \rho x dx dy, y_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \rho y dx dy, \tag{1}$$

其中 $M = \iint\limits_{\Omega} \rho dxdy$ 为薄板的质量.

若薄板是均匀的,则于公式(1)中应令 $\rho = 1$.

2° 转动惯量 I_x 和 I_y 分别为平面 Oxy 内薄板 Ω 对于坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量——用公式来表示

$$I_x = \iint\limits_{\Omega} \rho y^2 dxdy, I_y = \iint\limits_{\Omega} \rho x^2 dxdy, \tag{2}$$

其中 $\rho = \rho(x,y)$ 为薄板的密度.

于公式(2)中假定 $\rho = 1$,我们得到平面图形的几何转动惯量.

4051. 求边长为 a 的正方形薄板的质量,设薄板上每一点的密度与该点距正方形顶点之一的距离成比例且在正方形的中点等于 ρ_0.

解 取坐标系如图 8.50 所示,则密度

$$\rho = k\sqrt{x^2+y^2}.$$

由于 $\rho_0 = k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$,

故 $k = \frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}$,从而

$$\rho = \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}.$$

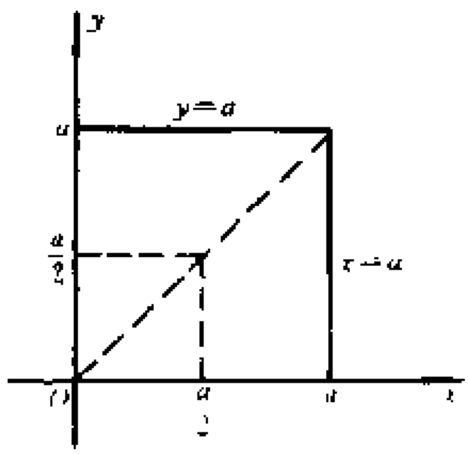

图 8.50

若引用极坐标,即得质量

$$M = \iint\limits_{\Omega} \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$= \frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^2dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}r^2dr\right)$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}\sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}\right)$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\,d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\varphi+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right|\right)\Bigg|_0^{4}$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})].$$

求由下列曲线所界均匀薄板的重心坐标：

4052. $ay=x^2, x+y=2a$ $(a>0)$.

解 密度 ρ 为常数. 积分域如图 8.51 所示. 质量

$$M=\rho\int_{2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a\quad x}dy$$

$$=\frac{9}{2}\rho a^2.$$

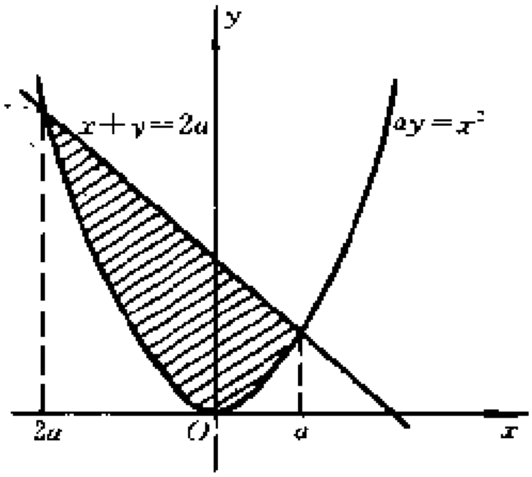

图 8.51

对于坐标轴的一次矩为

$$M_y=\rho\int_{-2a}^{a}xdx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=-\frac{9}{4}\rho a^3,$$

$$M_x=\rho\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}ydy=\frac{36}{5}\rho a^3.$$

于是，重心 (x_0,y_0) 为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=-\frac{a}{2},y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{8}{5}a.$$

4053. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a},x=0,y=0.$

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a dx\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}dy=\frac{1}{6}\rho a^2,$$

$$M_y=\rho\int_0^a xdx\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}dy=\frac{1}{30}\rho a^3.$$

于是,重心的横坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{a}{5}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知

$$x_0=y_0=\frac{a}{5}.$$

4054. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(x>0,y>0).$

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a dx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}dy=\rho\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^2tdt^{*)}$$

$$=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)dt$$

$$=3a^2\rho(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^2\rho}{32},$$

$$M_y=\rho\int_0^a xdx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}dy=\rho\int_0^a x(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=3a^3\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^5tdt=\frac{8a^3\rho}{105}.$$

于是,重心的横坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{256a}{315\pi}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知

$$x_0=y_0=\frac{256a}{315\pi}.$$

*） 代作换 $x=a\cos^3 t$.

4055. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$（线圈）.

解 此曲线在第一象限部分是一封闭曲线，围成一图形 Ω. 作变量代

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2b}{c^2}r\cos^4\theta\sin^2\theta, \\ y=\dfrac{ab^2}{c^2}r\cos^2\theta\sin^4\theta, \end{cases} \quad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

则原曲线方程变为 $r=1$. 又容易算得

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{2a^3b^3}{c^4}r(\sin^5\theta\cos^7\theta+\sin^7\theta\cos^5\theta),$$

故（利用 3856 题的结果）

$$\begin{aligned} M &= \iint_\Omega \rho dxdy \\ &= \frac{2a^3b^3}{c^4}\rho\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5\theta\cos^7\theta \\ &\quad +\sin^7\theta\cos^5\theta)d\theta \\ &= \frac{a^3b^3}{c^4}\rho\left[\frac{1}{2}B(3,4)+\frac{1}{2}B(4,3)\right] \\ &= \frac{a^3b^3}{c^4}\rho B(3,4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_\Omega \rho x dxdy \\ &= \frac{2a^5b^4}{c^6}\rho\int_0^1 r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin^2\theta(\sin^5\theta\cos^7\theta \end{aligned}$$

$$+\sin^7\theta\cos^5\theta)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\frac{a^5b^4}{c^6}\rho\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^{11}\theta d\theta\right.$$

$$\left.+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\theta\cos^9\theta d\theta\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^5b^4}{c^6}\rho[B(4,6)+B(5,5)].$$

于是,

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{a^2b}{3c^2}\cdot\frac{B(4,6)+B(5,5)}{B(3,4)}.$$

由于,

$$B(4,6)=\frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)}=\frac{3!5!}{9!},$$

$$B(5,5)=\frac{[\Gamma(5)]^2}{\Gamma(10)}=\frac{(4!)^2}{9!},$$

$$B(3,4)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)}=\frac{2!3!}{6!},$$

代入,化简得

$$x_0=\frac{a^2b}{3c^2}\cdot\frac{6![3!5!+(4!)^2]}{2!3!9!}=\frac{a^2b}{14c^2}.$$

同理,可求得重心的纵坐标为

$$y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_{\Omega}\rho y dxdy}{\iint\limits_{\Omega}\rho dxdy}=\frac{ab^2}{14c^2}.$$

4056. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy(x>0,y>0)$.

解 曲线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\sin 2\varphi$$

质量和对 Oy 轴的一次矩为

$$M = \iint_{\Omega} \rho dxdy$$
$$= \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr$$
$$= \frac{\rho a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\rho a^2}{2},$$
$$M_y = \iint_{\Omega} \rho x dxdy$$
$$= \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r \cdot r\cos\varphi dr$$
$$= \frac{\rho a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^{\frac{3}{2}} 2\varphi d\varphi$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\rho a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{5}{2}}\varphi \sin^{\frac{3}{2}}\varphi d\varphi$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)^{*)}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\Gamma(3)}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3 \frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2 \cdot 2}$$
$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\rho a^3 \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}\pi\rho a^3.$$

于是,重心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\pi a}{8}.$$

由关于直线 $y = x$ 的对称性知

$$x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8}.$$

*）利用 3856 题的结果.

4057. $r=a(1+\cos\varphi),\varphi=0$.

解 质量和一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}rdr$$

$$=\frac{1}{2}\rho a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=\frac{3}{4}\pi\rho a^2,$$

$$M_y=\rho\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r\cdot r\cos\varphi dr$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\left[\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4d\varphi-\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3d\varphi\right]$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\left(32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8tdt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6tdt\right)$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\left(32\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-16\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5\pi\rho a^3}{8},$$

$$M_x=\rho\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r\cdot r\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\frac{\rho a^3}{3}\cdot\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^{\pi}=\frac{4\rho a^3}{3}.$$

于是,重心的坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{5}{6}a,\quad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{16}{9\pi}a.$$

4058. $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi),y=$

解 质量和对 Ox 轴的一次矩为

$$M=\rho\int_0^{2\pi a}dx\int_0^y dy=\rho\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt$$
$$=3\pi\rho a^2.$$
$$M_x=\rho\int_0^{2\pi a}dx\int_0^y y dy=\frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi a}y^2dx$$
$$=\frac{1}{2}\rho a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\frac{5}{2}\pi\rho a^3.$$

于是，

$$y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{5}{6}a.$$

由对称性知：$x_0=\pi a$.

4059. 求圆形薄板 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 的重心坐标，设它在点 $M(x,y)$ 的密度与 M 点到 $A(a,0)$ 点的距离成比例.

解 按题设，密度

$$\rho=k\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,(k\text{ 为常数}).$$

于是，质量为

$$M=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}k\sqrt{(x-a)^2+y^2}dy$$
$$=k\int_{-a}^{a}\Big[y\sqrt{(x-a)^2+y^2}+(x-a)^2$$
$$\cdot\ln(y+\sqrt{(x-a)^2+y^2})\Big]\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$
$$=k\int_{-a}^{a}\sqrt{2a}(a-x)\sqrt{a+x}dx$$
$$-k\int_{-a}^{a}\Big[\frac{1}{2}\ln(a-x)\Big](a-x)^2dx$$
$$+k\int_{-a}^{a}(a-x)^2\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{2a})dx$$

$$= I_1 - I_2 + I_3.$$

由于

$$I_1 = k\int_{-a}^{a} \sqrt{2a}[-(a+x)^{\frac{3}{2}} + 2a(x+a)^{\frac{1}{2}}]dx$$

$$= \sqrt{2a}k \cdot \left[-\frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}}\right.$$

$$\left.+ \frac{4a}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{32}{15}ka^3,$$

$$I_2 = \frac{k}{2}\int_0^{2a} t^2\ln t dt = \frac{k}{6}t^3\ln t\,|_0^{2a} - \frac{k}{6}\int_0^{2a} t^3 \cdot \frac{1}{t}dt$$

$$= \frac{4}{3}ka^3 \cdot \ln 2a - \frac{4}{9}ka^3,$$

$$I_3 = k \cdot 2\int_0^{\sqrt{2a}} t(2a - t^2)\ln(t + \sqrt{2a})dt$$

$$= 8a^2k\int_0^{\sqrt{2a}} t\ln(t + \sqrt{2a})dt$$

$$- 8ka\int_0^{\sqrt{2a}} t^3\ln(t + \sqrt{2a})dt$$

$$+ 2k\int_0^{\sqrt{2a}} t^5\ln(t + \sqrt{2a})dt$$

$$= 8ka^2(\frac{a}{2} + a\ln\sqrt{2a})$$

$$- 8ka\left(\frac{7}{12}a^2 + a^2\ln\sqrt{2a}\right)$$

$$+ 2k\left(\frac{37}{45}a^3 + \frac{4}{3}a^3\ln\sqrt{2a}\right)$$

$$= \frac{44}{45}ka^3 + \frac{8}{3}ka^3\ln\sqrt{2a} = \frac{44}{45}ka^3 + \frac{4}{3}ka^3\ln 2a.$$

因而最后得

$$M=\frac{32}{15}ka^3-\left(\frac{4}{3}ka^3\ln 2a-\frac{4}{9}ka^3\right)$$
$$+\left(\frac{44}{45}ka^3+\frac{4}{3}ka^3\ln 2a\right)$$
$$=\frac{32}{9}ka^3.$$

仿照上述方法可求得一次矩

$$M_y=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}kx\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,dy$$
$$=-\frac{32}{45}ka^4.$$

而由对称性知：$M_x=0$.

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=-\frac{a}{5},\quad y_0=\frac{M_x}{M}=0.$$

4060. 求由变动的面积的重心所描写出来的曲线，所指的变动面积是被曲线

$$y=\sqrt{2px},\quad y=0,\quad x=X$$

所界的.

解 变动面积的质量

$$M=\rho\int_0^X dx\int_0^{\sqrt{2px}}dy=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{3}X^{\frac{3}{2}},$$

而一次矩

$$M_y=\rho\int_0^X x\,dx\int_0^{\sqrt{2px}}dy=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{5}X^{\frac{5}{2}},$$
$$M_x=\rho\int_0^X dx\int_0^{\sqrt{2px}}y\,dy=\rho\frac{1}{2}pX^2.$$

于是，变动面积的重心为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{3}{5}X,\ y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{3\sqrt{pX}}{4\sqrt{2}}.$$

因此，重心的轨迹方程为

$$y_0=\frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt{p\cdot\frac{5}{3}x_0}=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0},$$

此即所求的曲线方程，其图形是抛物线的一半.

求由下列曲线所界的面只($\rho=1$)对于坐标轴Ox和Oy的转动惯量I_x和I_y：

4061.+ $\frac{x}{b_1}+\frac{y}{h}=1$， $\frac{x}{b_2}+\frac{y}{h}=1$， $y=0(b_1>0,b_2>0,h>0)$.

解 若设$b_2>b_1$，则

$$I_x=\int_0^h y^2dy\int_{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_1}^{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_2}dx=(b_2-b_1)$$

$$\cdot\int_0^h y^2\left(1-\frac{y}{h}\right)dy=\frac{(b_2-b_1)h^3}{12},$$

$$I_y=\int_0^h dy\int_{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_1}^{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_2}x^2dx=\frac{b_2^3-b_1^3}{3}\int_0^h\left(1-\frac{y}{h}\right)^3dy$$

$$=\frac{h(b_2^3-b_1^3)}{12};$$

若设$b_1>b_2$，则

$$I_x=\frac{(b_1-b_2)h^3}{12},\quad I_y=\frac{h(b_1^3-b_2^3)}{12}.$$

4062. $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$， $x=0$， $y=0(0\leqslant x\leqslant a)$.

解 $$I_x=\int_0^a dx\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}y^2dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^a[a^3-3a^2\sqrt{2ax-x^2}+3a(2ax-x^2)$$

$$-(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[a^3x - 3a^2\left(\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{2}\right) + 3a^2x^2 - ax^3\right]\Bigg|_0^a$$

$$- \frac{1}{3}\int_0^a (2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^4\cos^4 tdt^{*}$$

$$= a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^4 tdt$$

$$= a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{a^4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi).$$

利用图形的对称性,即得 $I_y = I_x = \frac{a^4}{16}(16-5\pi)$.

*) 作代换 $x - a = a\sin t$.

4063. $r = a(1+\cos\varphi)$.

解 曲线所界的平面域可表示为

$$-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant a(1+\cos\varphi).$$

于是,

$$I_x = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\sin^2\varphi\cdot rdrd\varphi$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}a^4(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi d\varphi$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}a^4\int_0^{\pi}(1+4\cos\varphi+6\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi$$

$$+\cos^4\varphi)\sin^2\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^4\cdot\frac{21}{16} = \frac{21}{32}\pi a^{4\,*)}.$$

$$I_y = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\cos^2\varphi\cdot rdrd\varphi$$

$$= \frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi + 4\cos^3\varphi + 6\cos^4\varphi$$

$$+ 4\cos^5\varphi - \cos^6\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{49}{32}\pi a^4.$$

*）　对于任意自然数 n，有

$$\int_0^{\pi}\cos^n\varphi d\varphi = \begin{cases} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi d\varphi, & \text{当 } n \text{ 为偶数；} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

为算出 I_x、I_y 的值，也可变换被积函数的形式，直接用换元法计算，这样较简单.

事实上，我们有

$$I_x = \frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi d\varphi$$

$$= 2^6a^4\int_0^{\pi}\cos^{10}\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 2^6a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}x(1-\cos^2x)dx$$

$$= 2^6a^4\frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\left(1-\frac{11}{12}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{21}{32}\pi a^4.$$

$$I_y = \frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi d\varphi$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4 d\varphi - \frac{21}{32}\pi a^4$$

$$= 2^4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 x dx - \frac{21}{32}\pi a^4$$

$$= \frac{70}{32}\pi a^4 - \frac{21}{32}\pi a^4$$

$$= \frac{49}{32}\pi a^4.$$

4064. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

解 曲线的图形关于两坐标轴和直线 $y = x$ 是对称的，参看 1542 题的图形. 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

根据对称性，只要算出从 $\varphi = 0$ 到 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 部分面积的转动惯量再八倍起来即得结果，并且显然有 $I_x = I_y$. 于是，我们有

$$I_x = I_y = 4\iint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2)dxdy$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}} r^3 dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{(1-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)^2}$$

$$= 16a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{(3 + \cos 4\varphi)^2}$$

$$= \frac{4a^4}{9}\int_0^{\pi} \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{3}\cos x\right)^2} \quad {}^{*)}$$

$$= \frac{4a^4}{9}\left[-\frac{\frac{1}{3}\sin x}{\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{3}\cos x\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}{}^{**)}$$

$$= \frac{4a^4}{9}\cdot 2\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}.$$

*）作代换 $x = 4\varphi$.

* *）利用 2063 题的结果.

4065. $xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y \quad (x > 0, y > 0)$.

解 作代换 $xy = u, \frac{y}{x} = v$,则 $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$

且雅哥比式的绝对值 $|I| = \frac{1}{2v}$,曲线所界的面积即积分域变为

$$a^2 \leqslant u \leqslant 2a^2, \quad \frac{1}{2} \leqslant v \leqslant 2.$$

于是,

$$I_x = \iint_{\Omega} y^2 dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{2} dv \int_{a^2}^{2a^2} \frac{uv}{2v} du = \frac{9a^4}{8},$$

$$I_y = \iint_{\Omega} x^2 dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{2} dv \int_{a^2}^{2a^2} \frac{u}{2v^2} du = \frac{9a^4}{8}.$$

4066. 求面积 S 的极转动惯量

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dxdy,$$

面积 S 是由曲线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

所界的.

解 引用极坐标，则面积 S 的界线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos 2\varphi,$$

这是双纽线. 利用对称性，得

$$I_0=\iint_S (x^2+y^2)dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}r^3dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^4\cos^2 2\varphi d\varphi=\frac{\pi a^4}{8}.$$

4067. 证明公式

$$I_l=I_{l_0}+Sd^2,$$

其中 I_l，I_{l_0} 是面积 S 对于二平行轴 l 和 l_0 的转动惯量，其中 l_0 是通过面积的重心，而 d 为两轴间的距离.

证 取 l_0 轴为 Ox 轴，面积的重心为坐标原点，则

$$I_l=\iint_S (y-d)^2dxdy=\iint_S y^2dxdy$$

$$-2d\iint_S ydxdy+d^2\iint_S dxdy.$$

因为 l_0 通过面积 S 的重心，故

$$y_0=\frac{1}{S}\iint_S ydxdy=0,\text{即}\iint_S ydxdy=0.$$

又

$$\iint_S y^2dxdy=I_{l_0},\iint_S dxdy=S,$$

于是，

$$I_l=I_{l_0}+Sd^2.$$

4068. 证明面积 S 对于通过重心 $O(0,0)$ 并与 Ox 轴组成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为面积 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量及 I_{xy} 为离心惯量：

$$I_{xy} = \iint_S \rho xydxdy.$$

证 今取直角坐标系 $Ox'y'$，使 Ox' 轴与 Ox 轴的夹角为 α，则有

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, y' = - x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

这就是旋转变换，雅哥比式的绝对值

$$|I| = \left|\frac{D(x',y')}{D(x,y)}\right| = 1.$$

于是，

$$I = \iint_S y'^2\rho dx'dy' = \iint_S (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2\rho dxdy$$

$$= \cos^2\alpha\iint_S y^2\rho dxdy - 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cdot\iint_S \rho xydxdy + \sin^2\alpha\iint_S \rho x^2dxdy$$

$$= I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha.$$

4069. 求以 a 为边的正三角形的面积对于通过三角形重心并与它的高成 α 角的直线的转动惯量.

解 利用上题的结果. 取重心为坐标原点. 不妨取 Ox 轴平行于三角形的一条边，则过重心与高成 α 角的直线，即为过坐标原点与 Ox 轴成 α 角的直线. 于是，要求的转动惯量为

$$I_{\alpha}=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha.$$

由于三角形三边所在的直线方程为

$$y=-\frac{a}{2\sqrt{3}},y=-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$y=\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}},$$

所以,根据对称性知:

$$I_x=2\int_0^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}}y^2dy$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{3}\Big[\Big(-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}\Big)^3-\Big(-\frac{a}{2\sqrt{3}}\Big)^3\Big]dy$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}\Big(-\sqrt{3}x^3+\sqrt{3}ax^2-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2x+\frac{\sqrt{3}}{24}\Big)dx$$

$$=2\sqrt{3}a^4\Big(\frac{1}{48}-\frac{1}{64}\Big)=\frac{a^4}{32\sqrt{3}};$$

$$I_{xy}=\iint\limits_S xydxdy=0;$$

$$I_y=2\int_0^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}}x^2dy$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}x^2\Big[\Big(-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}\Big)+\frac{a}{2\sqrt{3}}\Big]dx$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}(-\sqrt{3}x^3+\frac{\sqrt{3}a}{2}x^2)dx$$

$$= \sqrt{3}a^4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{32}\right) = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

于是，

$$I_a = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}\cos^2\alpha + \frac{a^4}{32\sqrt{3}}\sin^2\alpha = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

4070. 设有水平面为 $z=h$ 的圆柱形容器 $x^2+y^2=a^2, z=0$，求它侧壁上($x \geqslant 0$)水的压力.

解 用 X 与 Y 分别表示压力在 Ox 轴与 Oy 轴上的投影. 由对称性，显然有 $Y=0$. 下面求 X. 由于 $dS = ad\theta dz\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，而在面元 dS 上的压力在 Ox 轴上的投影 dX 为 $(zdS)\cos\theta$. 于是，

$$X = \iint_S z\cos\theta dS = \iint_S az\cos\theta d\theta dz$$

$$= a\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\right)\cdot\left(\int_0^h zdz\right) = ah^2.$$

4071. 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中的深度为 h(由球心量起)，这里 $h \geqslant a$. 求在球表面的上部和下部的液体压力.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则在球面上的点 (x,y,z) 处沉入液体的深度 d 为

$$d = h - z \quad (-a \leqslant z \leqslant h).$$

于是，上半球面 S_1 的点和下半球面 S_2 的点的深度分别为：

$$d = h - \sqrt{a^2-(x^2+y^2)},$$

$$d = h + \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}.$$

根据对称性知，压力在 Ox 轴上和 Oy 轴的射影均为零，

故只要计算压力在Oz轴上的射影. 液体作用于球面上部和下部的压力分别记以p_1和p_2,并设γ为球上各点处压力的方向(即内法线方向)与Oz轴正向的夹角,则

$$p_1 = \iint_{S_1} d\delta\cos\gamma ds$$
$$= - \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} \delta[h - \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]dxdy$$
$$= - h\pi a^2\delta + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1-r^2}rdr$$
$$= - h\pi a^2\delta + \left(\frac{-2\pi\delta}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}\right)\Bigg|_0^a$$
$$= - \pi a^2\delta\left(h-\frac{2a}{3}\right) \quad (p_1<0 \text{ 表示压力向下}).$$

同理,我们有

$$p_2 = \iint_{S_2} d\delta\cos\gamma dS$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} \delta[h + \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]dxdy$$
$$= \pi a^2\delta\left(h+\frac{2a}{3}\right) \quad (p_2>0 \text{ 表示压力向上}).$$

4072. 底半径为a高为b的直圆柱完全沉入密度为δ的液体中,其中心在液面下的深度为h,而圆柱的轴与铅垂线成α角,求在圆柱上底和下底的液体压力.

解 取圆柱的中心为坐标原点,取Oxy平面是水平的,再取圆柱的轴(朝上的方向)在Oxy平面上的投影所在的方向为Ox轴,取Oz轴垂直朝上,最后取Oy轴使Ox轴Oy轴和Oz轴构成右手系.

于是,液面方程为$z=h$. 设圆柱上底为S_1,下底为

S_2,则 S_1 所在平面的方程为

$$x\sin\alpha + z\cos\alpha = \frac{b}{2}, \tag{1}$$

S_2 所在平面的方程为

$$x\sin\alpha + z\cos\alpha = -\frac{b}{2}. \tag{2}$$

在点(x,y,z)处$(z \leqslant h)$液体的深度为 $h-z$. 用 X_1,Y_1 和 Z_1 分别表示液体在圆柱上底 S_1 上压力在 Ox 轴,Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 同样,用 X_2,Y_2 和 Z_2 分别表示在 S_2 上压力在 Ox 轴,Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 显然,$Y_1 = Y_2 = 0$. 我们有

$$X_1 = -\iint_{S_1} \delta(h-z)\sin\alpha dS = -\delta\sin\alpha \iint_{S_1} (h-z)dS, \tag{3}$$

$$Z_1 = -\iint_{S_1} \delta(h-z)\cos\alpha dS = -\delta\cos\alpha \iint_{S_1} (h-z)dS. \tag{4}$$

由(1)式知,在 S_1 上有

$$z = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2} - x\sin\alpha\right).$$

于是,注意到 S_1 的面积为 πa^2,可知

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} (h-z)dS &= \iint_{S_1} \left\{h - \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2} - x\sin\alpha\right)\right\}dS \\
&= \left(h - \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right)\iint_{S_1} dS + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\iint_{S_1} xdS \\
&= \left(h - \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right)\pi a^2 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\iint_{S_1} xdS.
\end{aligned}$$

由于$\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_{S_1} xdS$是$S_1$的重心的$x$坐标，也即$\frac{b}{2}\sin\alpha$，故

$\iint\limits_{S_1} xdS = \frac{1}{2}\pi a^2 b\sin\alpha$. 代入即得

$$\iint\limits_{S_1}(h-z)dS = \left(h - \frac{b}{2\cos\alpha}\right)\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2 b\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$
$$= \left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\pi a^2.$$

以此代入(3)式与(4)式，得

$$X_1 = -\pi a^2\delta\left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha,$$
$$Z_1 = -\pi a^2\delta\left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha.$$

同理，我们有

$$X_2 = \iint\limits_{S_2}\delta(h-z)\sin\alpha dS = \delta\sin\alpha\iint\limits_{S_2}(h-z)dS,$$
$$Z_2 = \iint\limits_{S_2}\delta(h-z)\cos\alpha dS = \delta\cos\alpha\iint\limits_{S_2}(h-z)dS.$$

再注意到(2)式，类似地可计算得

$$\iint\limits_{S_2}(h-z)dS = \iint\limits_{S_2}\left[h + \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2} + x\sin\alpha\right)\right]dS$$
$$= \left(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\pi a^2.$$

于是，

$$X_2 = \pi a^2\delta\left(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha,$$
$$Z_2 = \pi a^2\delta\left(h + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha.$$

4073. 求均匀的圆柱$x^2 + y^2 \leqslant a^2, 0 \leqslant z \leqslant h$对质点$P(0,0,$

b) 的引力，设圆柱的质量等于 M，而点的质量等于 m.

解 根据对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影等于零，故只要计算引力在 Oz 轴上的射影 Fz. 今取圆环，其体积为

$$dV = 2\pi r dr dz,$$

则相应的质量为

$$dM = \frac{2\pi r M dr dz}{\pi a^2 h} = \frac{2Mr}{a^2 h} dr dz,$$

吸引质点 P 的引力

$$dF_z = -\frac{2krmM(b-z)}{a^2 h \sqrt{[r^2+(b-z)^2]^3}} dr dz.$$

于是，所求的引力

$$F_z = -\frac{2kmM}{a^2 h}\int_0^h\int_0^a \frac{r(b-z)}{\sqrt{[r^2+(b-z)^2]^3}} dr dz$$

$$= -\frac{2kmM}{a^2 h}\left[\int_0^h \operatorname{sgn}(b-z) dz\right.$$

$$\left. - \int_0^h \frac{b-z}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}} dz\right]$$

$$= -\frac{2kmM}{a^2 h}[|b| - |b-h| + \sqrt{a^2+(b-h)^2}$$

$$- \sqrt{a^2+b^2}],$$

其中 k 为引力常数.

4074. 物体在椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

上压力的分布由公式

$$p = p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

所给出. 求物体在此面上的平均压力.

解 物体在椭圆面上的平均压力

$$p_{cp} = \frac{1}{\pi ab} \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} p_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$$

$$= \frac{4}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 p_0(1 - r^2)abrdr$$

$$= \frac{4}{\pi ab} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p_0 ab}{4} = \frac{p_0}{2}.$$

4075. 草地的形状为以 a 和 b 为边的矩形，均匀地盖上密度为 p 千克 / 平方米的砍倒的草. 假设运送 P 千克重到距离为 r 远的地方所化的功为 $kPr(0 < k < 1)$. 要把所有的干草聚集在草地的中心，最少必须化多少功？

解 不妨将坐标原点取在矩形的中心，Ox 轴平行于 a 边，Oy 轴平行于 b 边. 由于将面积 $dxdy$ 上的草移到中心要化的功为

$$dW = kp\sqrt{x^2 + y^2}dxdy,$$

并利用对称性，便知所要求的功为

$$W = 4kp\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$$

$$= 4kp\left(\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}\int_0^{\frac{a}{2\cos\varphi}} r^2 drd\varphi + \int_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{b}{2\sin\varphi}} r^2 drd\varphi\right)$$

$$= \frac{kp}{6}\left(a^3\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3\varphi}d\varphi + b^3\int_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3\varphi}d\varphi\right).$$

但是，

$$\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3\varphi}d\varphi = \left(\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\Bigg|_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\,*)}$$

$$=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a},$$

$$\int_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3\varphi}d\varphi = \left(-\frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|\right)\Bigg|_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}\,**)}$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b},$$

于是,我们有

$$W=\frac{kp}{12}\left(2ab\sqrt{a^2+b^2}+a^3\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right.$$

$$\left.+b^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right).$$

*) 利用 2000 题的结果.

**) 利用 1999 题的结果.

§6. 三 重 积 分

1° 三重积分的直接计算法 设函数 $f(x,y,z)$ 是连续的,且有界域 V 由下列不等式确定出来:

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

$$z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y),$$

其中 $y_1(x), y_2(x), z_1(x,y), z_2(x,y)$ 皆为连续函数. 则函数 $f(x,y,z)$

展布于域 V 内的三重积分可按公式

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$ 来计算. 有时采用下面的公式也很方便

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}dx\iint\limits_{S(x)}f(x,y,z)dydz,$$

其中 $S(x)$ 是用平面 $X=x$ 截域 V 所得的截断面.

2° 三重积分中的变量代换　若 $Oxyz$ 空间的有界三维闭域 V 借助于下列连续可微分的函数双方单值地反应到 $O'uvw$ 空间的域 V'

$$x=x(u,v,\omega),y=y(u,v,\omega),z=z(u,v,\omega),$$

并且当 $(u,v,\omega)\in V'$ 时,

$$I=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\omega)}\neq 0,$$

则下面的公式成立

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{V'}f[x(u,v,\omega)y(u,v,\omega),z(u,v,\omega)]|I|dudvd\omega.$$

在特殊情况下,有:1) 圆柱坐标系 φ,r,h,其中

$$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi,z=h,$$

及

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,r,h)}=r,$$

2) 球坐标系 φ,ψ,r,其中

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,y=r\sin\varphi\cos\psi,z=r\sin\psi,$$

及

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,\psi,r)}=r^2\cos\psi.$$

计算下列三重积分：

4076. $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$，此处 V 是由曲面 $z=xy, y=x, x=1, z=0$ 所界的区域.

解 $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz = \int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz$

$$= \frac{1}{364}.$$

4077. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，此处 V 是由曲面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所界的区域.

解 $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right)dy$$

$$= \int_0^1\left(-\frac{1}{8}y-\frac{1}{2(1+x+y)}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1\left(-\frac{3}{8}+\frac{x}{8}+\frac{1}{2(1+x)}\right)dx$$

$$= \left(-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

4078. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$，此处 V 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=1, x=0, y=0, z=0$ 所界的区域.

解 $\iiint\limits_V xyzdxdydz$

$$= \int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2dx = \frac{1}{48}.$$

4079. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$，此处 V 是由曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所界的区域.

解 设 P_x, Q_y, R_z 分别表示立体 V 与平面 $x=$ 常数，$y=$ 常数，$z=$ 常数所截部分在 O_{yz}, O_{zx}, O_{xy} 平面上的射影，则有

$$\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$$

$$= \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2}dx \iint\limits_{P_x} dydz + \int_{-b}^b \frac{y^2}{b^2}dy \iint\limits_{Q_y} dzdx$$

$$+ \int_{-c}^c \frac{z^2}{c^2}dz \iint\limits_{R_z} dxdy$$

$$= \frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^a x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx^{*)} + \frac{\pi ac}{b^2}\int_{-b}^b y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$+ \frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^c z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$= 3\cdot\frac{4\pi abc}{15} = \frac{4\pi abc}{5}.$$

*） P_x 在平面 $X=x$ 上的方程为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1,$$

故其面积为

$$\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Q_y 及 R_z 的面积类推.

4080. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$，其中 V 是由曲面

$$x^2+y^2=z^2, z=1$$

所界的区域.

解 曲面在 Oxy 平面上的射影 Q 为圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$. 于是，

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$$

$$=\iint\limits_Q dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2}dz$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left[\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\right]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(r-r^2)rdr=\frac{\pi}{6}.$$

于下列三重积分内用各种方法来配置积分的限：

4081. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz.$

解 有界域 V 如图 8.52 所示.

如果先对 y 积分，再对 z，x 积分，如图 8.53 所示，则积分域在 Oyz 平面上的射影域由诸直线

$z = 0, z = x + y,$

$y = 0, y = 1-x$（x 固定）

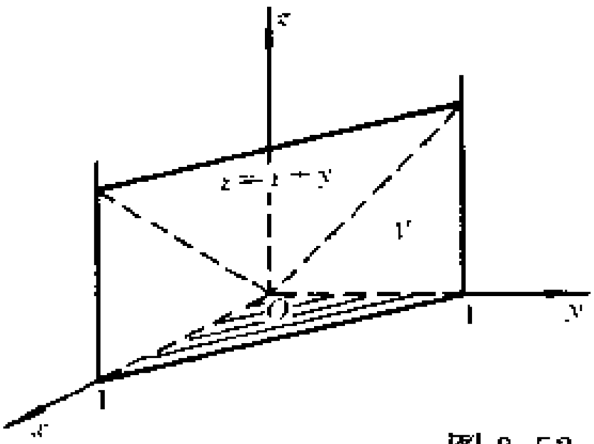

图 8.52

围成. 于是，我们有

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x,y,z)dy + \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy \right\}^{*)}$$

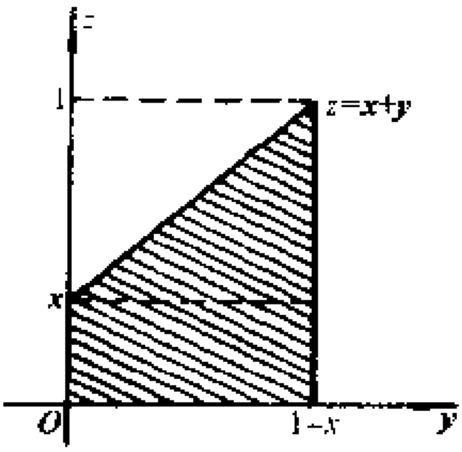

图 8.53

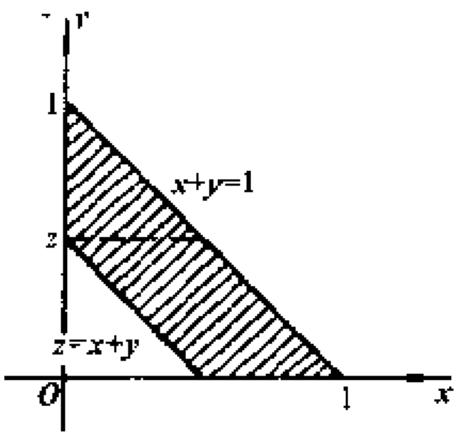

图 8.54

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，如图 8.54 所示，则有

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$$= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y,z)dx \right\}.$$

*）这里用的公式为 $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

$$= \int_a^b dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)dydz.$$

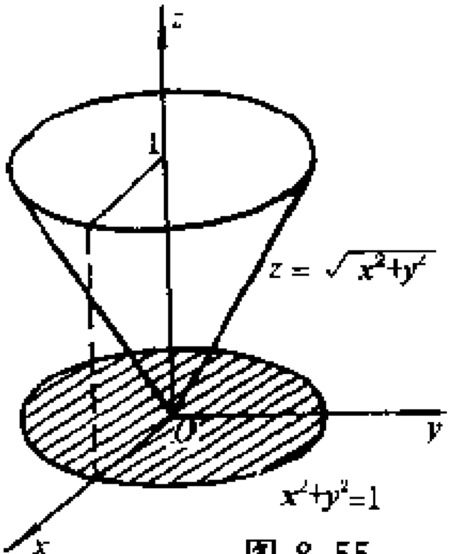

图 8.55

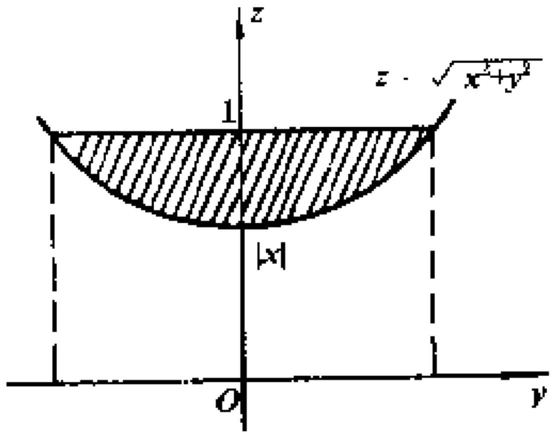

图 8.56

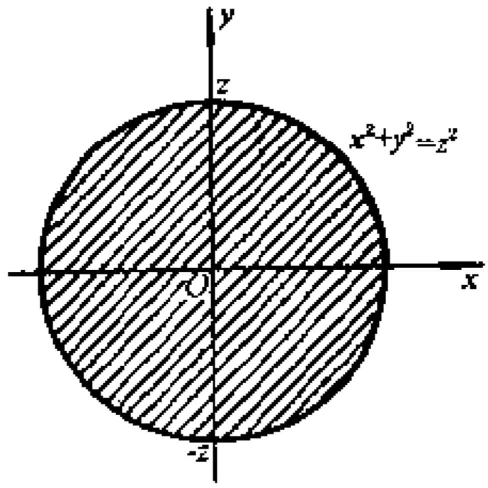

图 8.57

4082. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz.$

解　有界域 V 如图 8.55 所示.

如果先对 y 积分，再对 z，x 积分，如图 8.56 所示，则积分域在 Oyz 平面上的射影域由不等式

$|x| \leqslant z \leqslant 1$，$-\sqrt{z^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{z^2-x^2}$（$x$ 固定）给出. 于是，我们有

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{1} dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)dy.$$

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，如图 8.57 所示，则有

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz$$

$$= \int_{0}^{1} dz \int_{-z}^{z} dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx.$$

4083. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz.$

解　如果先对 y 积分，再对 z、x 积分，则积分域在 Oxy 平面上的射影域 *）由方程

$$x = 1, z = 0, z = x^2$$

及

$$x = 0, x = 1, z = x^2, z = x^2 + 1$$

所表示的线围成. 于是，我们有

$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$$

$$= \int_{0}^{1} dx \Big(\int_{0}^{x^2} dz \int_{0}^{1} f(x,y,z)dy$$

$$+\int_{x^2}^{x^2+1}dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^{1}f(x,y,z)dy\Big].$$

如果先对 x 积分，再对 z、y 积分，不难由轮换对称关系得出结果。

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，则积分域在 Oyz 平面上的射影域由方程

$$y=1,z=0,y=\sqrt{z}$$

及

$$y=0,y=1,y=\sqrt{z},y=\sqrt{z-1}$$

所表示的线围成. 于是，我们有

$$\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1dz\Big[\int_0^{\sqrt{z}}dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{1}f(x,y,z)dx$$

$$+\int_{\sqrt{z}}^{1}dy\int_0^1f(x,y,z)dx\Big]$$

$$+\int_1^2dz\int_{\sqrt{z-1}}^{1}dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{1}f(x,y,z)dx.$$

*）这里采用的投影方式与前两题不同，系用结果

$$\iiint\limits_v f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{\Omega}dxdz\int_{y_1}^{y_2}f(x,y,z)dy.$$

用一重积分以代替三重积分：

4084. $\int_0^x d\xi\int_0^{\xi}d\eta\int_0^{\eta}f(\zeta)d\zeta.$

解 $\int_0^x d\xi\int_0^{\xi}d\eta\int_0^{\eta}f(\xi)d\xi=\int_0^x d\xi\int_0^{\xi}d\zeta\int_{\zeta}^{\xi}f(\zeta)d\eta$

$$=\int_0^x d\xi\int_0^{\xi}f(\zeta)(\xi-\zeta)d\zeta$$

$$=\int_0^x d\zeta\int_{\zeta}^{x}f(\zeta)(\xi-\zeta)d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x f(\zeta)(x-\zeta)^2 d\zeta.$$

4085. $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)dz.$

解 化为先对 y 积分，再对 x、z 积分，可将原积分表示成如下两部分：

$$\int_0^1 dz\left[\int_z^1 dx\int_0^1 f(z)dy - \int_0^z dx\int_{z-x}^1 f(z)dy\right]$$

$$= \int_0^1 dz\int_z^1 f(z)dx + \int_0^1 dz\int_0^z f(z)(1-z+x)dx$$

$$= \int_0^1 f(z)(1-z)dz + \int_0^1 f(z)(1-z)zdz + \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)z^2 dz$$

$$= \int_0^1 f(z)\left(1-\frac{z^2}{2}\right)dz = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)(2-z^2)dz;$$

$$\int_1^2 dz\int_{z-1}^1 dx\int_{z-x}^1 f(z)dy$$

$$= \int_1^2 dz\int_{z-1}^1 f(z)(1-z+x)dx$$

$$= \int_1^2 \left[f(z)(1-z)x + \frac{1}{2}f(z)x^2\right]\Big|_{z-1}^1 dz$$

$$= \int_1^2 f(z)\left[1-z+(z-1)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(z-1)^2\right]dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (z)(z-2)^2 dz,$$

于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)dz = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)(2-z^2)dz$$

$$+ \frac{1}{2}\int_1^2 f(z)(2-z)^2 dz.$$

4086. 设 $f(x,y,z) = F''_{xyz}(x,y,z)$ 及 a,b,c,A,B,C 为常数，求：

$$\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,y,z)dz.$$

解 $$\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,y,z)dz$$

$$= \int_a^A dx\int_b^B [F''_{xy}(x,y,C)-F''_{xy}(x,y,c)]dy$$

$$= \int_a^A [F'_x(x,B,C)-F'_x(x,b,C)-F'_x(x,B,c)$$
$$+ F'_x(x,b,c)]dx$$

$$= F(A,B,C)-F(a,B,C)-F(A,b,C))$$
$$+ F(a,b,C)-F(A,B,c) + F(a,B,c)$$
$$+ F(A,b,c)-F(a,b,c).$$

变换为球坐标以计算积分：

4087. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 - y^2 + z^2}dxdydz$，此处 V 是由曲面

$$x^2 + y^2 + z^2 = z$$

所界的区域.

解 令 $x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi$，则曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 化为 $r = \sin\psi$. 从而

$$V: 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant \sin\psi.$$

$$|I| = r^2\cos\psi.$$

于是，

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\int_0^{\sin\psi} r \cdot r^2\cos\psi dr$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\psi\cos\psi d\psi = \frac{\pi}{10}.$$

4088. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2dz.$

解 变换为球坐标，积分域 V 为

$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}.$

于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sqrt{2}} r^2\cos\psi\cdot r^2\sin^2\psi dr$$

$$=\frac{1}{5}4\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin^2\psi d\psi$$

$$=\frac{\pi}{5}2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\sin^3\psi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

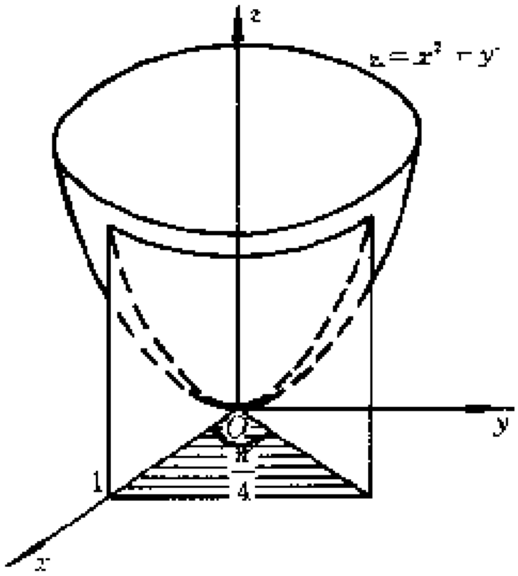

图 8.58

4089. 于积分中变换为球坐标

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz.$$

此处 V 是由曲面 $z=x^2+y^2,x=y,x=1,y=0,z=0$ 所界的区域.

解 引用球坐标，由 $x=y,x=1,y=0$ 知：$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$(图 8.58).

又从原点引半射线，由曲面 $z=x^2+y^2$ 穿进，平面 $x=1$ 穿出，于是，得 r 的下限为 $r=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，$r$ 的上限为 $r=\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$. 而 ψ 的变化域由 $z=0$ 到 $z=x^2+y^2$，$x=1$ 所决定，即

$$0\leqslant\psi\leqslant\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}.\ ^{*)}$$

于是，

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}}\cos\psi d\psi\int_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}}r^2f(r)dr.$$

*） 因为 $x=1$ 对应 $r=\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$，$z=x^2+y^2$ 对应 $r=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，故$\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，即 $\psi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}$.

4090. 进行适当的变量代换，以计算三重积分

$$\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz,$$

此处 V 为椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的内部.

解 作变量代换

$x=ar\cos\varphi\cos\psi, y=br\sin\varphi\cos\psi, z=cr\sin\psi$，则有 $|I|=abcr^2\cos\psi$，且对于 V 的$\frac{1}{8}$ 部分有

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是，

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\,\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=4\pi\int_0^1 abcr^2\,\sqrt{1-r^2}\,dr = 4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\,dt$$

$$=\frac{\pi abc}{2}\int_0^{2}(1-\cos4t)\,dt = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

4091. 变换为圆柱坐标,以计算积分

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz,$$

此处 V 是由曲面 $x^2+y^2=2z$, $z=2$ 所界的区域.

解 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$,则 $x^2+y^2=2z$ 化为 $r^2=2z$. 积分域

$$V:0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 2, \frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant 2.$$

$$|I|=r.$$

于是,

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r^2\cdot r\,dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}dz$$

$$=\frac{16\pi}{3}.$$

4092. 计算积分

$$\iiint\limits_V x^2\,dxdydz$$

此处 V 是由曲面 $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$ $(0<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(0<\alpha<\beta)$, $z=h$ $(h>0)$ 所界的区域.

解 作变换 $\frac{z}{y^2}=u$, $\frac{z}{x}=v$, $z=w$, 则 $x=\frac{w}{v}$, $y=$

$\sqrt{\dfrac{\omega}{u}}$, $z=\omega$. 从而积分域变为

$$V: a\leqslant u\leqslant b, \alpha\leqslant v\leqslant\beta, 0\leqslant\omega\leqslant h,$$

且雅哥比行列式

$$I=\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\omega}{v^2} & \dfrac{1}{v} \\ \dfrac{-\sqrt{\omega}}{2u\sqrt{u}} & 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{u\omega}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{-\omega\sqrt{\omega}}{2u\sqrt{u}v^2}.$$

于是，

$$\iiint_V x^2dxdydz=\int_0^h\omega^{\frac{7}{2}}d\omega\int_\alpha^\beta\frac{1}{v^4}dv\int_a^b\frac{1}{2u\sqrt{u}}du$$

$$=\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}.$$

4093. 求积分

$$\iiint_V xyzdxdydz.$$

其中V位于$x>0, y>0, z>0$这一卦限内且由下列曲面所界：

$z=\dfrac{x^2+y^2}{m}$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{n}$, $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b; 0<\alpha<\beta; 0<m<n)$.

解 作变换$\dfrac{z}{x^2+y^2}=u$, $xy=v$, $\dfrac{y}{x}=\omega$, 则$x=\sqrt{\dfrac{v}{\omega}}$,

$y=\sqrt{v\omega}$, $z=uv\left(\omega-\dfrac{1}{\omega}\right)$. 且

$$I=\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{v\omega}} & -\dfrac{\sqrt{v}}{2\omega\sqrt{\omega}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{v}} & \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{\omega}} \\ v\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right) & u\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right) & uv\left(1-\dfrac{1}{\omega^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{2\omega}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right),$$

$V:\dfrac{1}{n}\leqslant u\leqslant\dfrac{1}{m},a^2\leqslant v\leqslant b^2,\alpha\leqslant\omega\leqslant\beta.$

于是，

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz$$

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}\frac{u}{2}du\int_{a^2}^{b^2}v^3dv\int_{\alpha}^{\beta}\left(\omega+\frac{1}{\omega^3}+\frac{2}{\omega}\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right].$$

4094. 求函数

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$ 内的平均值.

解　域 $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$ 即

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{4},$$

其体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi.$

作变换：$x=r\cos\varphi\cos\psi+\dfrac{1}{2},y=r\sin\varphi\cos\psi+\dfrac{1}{2},z=\dfrac{1}{2}+r\sin\psi$，则有

$$f_{平均}=\frac{1}{V}\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cos\psi\cdot(\frac{3}{4}+r^2$$

$$+r\sin\psi+r\cos\varphi\cos\psi+r\sin\varphi\cos\psi)dr$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cos\psi\cdot\left(\frac{3}{4}+r^2\right)dr$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sqrt{3}}{20}\cos\psi d\psi$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\frac{3\sqrt{3}}{10}d\varphi$$

$$=\frac{1}{V}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi=\frac{2}{\sqrt{3}\pi}\cdot\frac{3\sqrt{3}\pi}{5}=\frac{6}{5}.$$

4095. 求函数

$$f(x,y,z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

在域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$内的平均值.

解 由于域$V:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$为椭球,其体积等于$\frac{4}{3}\pi abc$,故平均值

$$f_{平均}=\frac{3}{4\pi abc}\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}dxdydz.$$

若作变换:$x=ar\cos\varphi\cos\psi,y=br\sin\varphi\cos\psi,z=cr\sin\psi$,并利用对称性,则

$$f_{(\xi,\eta)} = \frac{3}{4\pi abc} \cdot 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abce^r r^2 \cos\psi d\psi$$
$$= 3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi\right)\left(\int_0^1 r^2 e^r dr\right)$$
$$= 3(e-2).$$

4096. 利用中值定理，估计积分

$$u = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

之值，其中 $a^2+b^2+c^2>R^2$.

解 由积分中值定理，有

$$u = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3, \qquad (1)$$

其中 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$. 由于函数

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

代表点 (x,y,z) 与点 (a,b,c) 之间的距离，显然在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 中此距离的最小值是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R$，最大值是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R$，并且只在一个点达到最小值，也只在一个点达到最大值. 因此，函数

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 中的最大值是 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}$，最小值是 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}$，并且只在一个点达到最大值，也只在一个点达到最小值. 我们证明(1)式中的中值不可能是函数的最大值，也不可

能是函数的最小值，事实上，例如，若是最大值，即

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

则由（1）式知

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} f(x,y,z)dxdydz=0, \tag{2}$$

其中 $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}$

$$-\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}.$$

显然，在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 上 $f(x,y,z)\geqslant 0$ 且 $f(x,y,z)$ 为连续函数. 于是，由（2）式知在域 $x+y^2+z^2\leqslant R^2$ 上必有 $f(x,y,z)\equiv 0$，这显然是不可能的. 因此，

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}<\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

即

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R<\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}$$

$$<\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R,$$

故

$$\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R,$$

其中 $|\theta|<1$. 于是，由（1）式得

$$u = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R}.$$

4097. 证明:若函数 $f(x,y,z)$ 于域 V 内是连续的且对于任何的域 $\omega \subset V$

$$\iiint_{\omega} f(x,y,z)dxdydz = 0,$$

则当 $(x,y,z) \in V$ 时,$f(x,y,z) \equiv 0$.

证 用反证法. 若当 $(x,y,z) \in V$ 时,$f(x,y,z) \not\equiv 0$. 不失一般性,设对于 V 的某内点 (x_0,y_0,z_0),有 $f(x_0,y_0,z_0) > 0$,则由于 $f(x,y,z)$ 的连续性,故存在点 (x_0,y_0,z_0) 的某个闭邻域 $\omega' \subset V$,使当 $(x,y,z) \in \omega'$ 时,

$$f(x,y,z) > 0.$$

这样一来,利用中值定理,即有

$$\iiint_{\omega'} f(x,y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta) \cdot V_{\omega'} > 0,$$

其中 $(\xi,\eta,\zeta) \in \omega' \subset V$. 这与假设

$$\iiint_{\omega} f(x,y,z)dxdydz \equiv 0$$

矛盾. 因此,当 $(x,y,z) \in V$ 时,$f(x,y,z) \equiv 0$.

4098. 求 $F'(t)$,设:

(a) $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$,其中 f 为可微分函数;

(б) $F(t) = \iiint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ 0 \leqslant y \leqslant t \\ 0 \leqslant z \leqslant t}} f(xyz)dxdydz$,其中 f 为可微分函数.

解 (a) 作球坐标变换得

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\int_0^t f(r^2)r^2dr$$

$$=4\pi\int_0^t (r^2)r^2dr,$$

于是，

$$F'(t)=4\pi t^2 f(t^2).$$

(σ) 作变换 $x=t\xi,y=t\eta,z=t\zeta$ 得

$$F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}}(xyz)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} f(t^3\xi\eta\zeta)t^3d\xi d\eta d\zeta,$$

于是，

$$F'(t)=3\iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} t^2 f(t^3\xi\eta\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$

$$+3\iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} f(t^3\xi\eta\zeta)t^5\xi\eta\zeta d\xi d\eta d\zeta$$

$$=\frac{3}{t}\Big[F(t)+\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f'(xyz)xyzdxdydz\Big]$$

$$(t>0).$$

4099. 求

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p dxdydz,$$

其中m,n,p为非负整数.

解 分两种情况：

i) 设m,n,p中至少有一个是奇数.例如,设p为奇数.于是,

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ z\geqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$+\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ z\leqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz=I_1+I_2.$$

今在积分I_2中作变量代换$x=u,y=v,z=-\omega$,则$\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,\omega)}=-1$,从而,注意到$p$为奇数,可知

$$I_2=-\iiint\limits_{\substack{u^2+v^2+\omega^2\leqslant 1\\ \omega\geqslant 0}} u^m v^n \omega^p dudvd\omega=-I_1$$

于是,$I=I_1-I_1=0$.

ii) 设m,n,p均为偶数.此时被积函数$x^m y^n z^p$关于三个坐标平面皆对称.于是,

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$=8\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz.$$

引用球坐标,$x=r\cos\varphi\cos\psi,y=r\sin\varphi\cos\psi,z=r\sin\psi$,得

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0,\,z\geqslant 0}} x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\varphi \sin^n\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+n+1}\psi \sin^p\psi\, d\psi$$

$$\cdot \int_0^1 r^{m+n+p+2}\, dr$$

$$= \frac{1}{m+n+p+3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$$

$$\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)}\ {}^{*)}$$

$$= \frac{1}{4(m+n+p+3)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{4(m+n+p+3)}$$

$$\cdot\frac{\frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}}\cdot\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{(p-1)!!}{2^{\frac{p}{2}}}\cdot\pi\sqrt{\pi}}{\frac{(m+n+p+1)!!}{2^{\frac{m+n+p+2}{2}}}\cdot\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{\pi}{2(m+n+p+3)}$$

$$\cdot\frac{(m-1)!!\cdot(n-1)!!\cdot(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!},$$

故

$$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$= \frac{4\pi}{m+p+n+3} \cdot \frac{(m-1)!!\cdot(n-1)!!\cdot(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}.$$

*)利用 3856 题的结果.

4100. 计算迪里黑里积分

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dxdydz$$

$(p>0, q>0, r>0, s>0)$,

此处 V 是由平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所界的区域,假定

$x+y+z=\xi, y+z=\xi\eta, z=\xi\eta\zeta$.

解 由假设知

$x=\xi(1-\eta), y=\xi\eta(1-\zeta), z=\xi\eta\zeta$.

在此变换下可求得 $|I|=\xi^2\eta$,并且积分域 V 变为:

$$0\leqslant\xi\leqslant 1, 0\leqslant\eta\leqslant 1, 0\leqslant\zeta\leqslant 1.$$

于是,

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dxdydz$$

$$= \int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s d\xi \int_0^1 \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p d\eta$$

$$\cdot \int_0^1 \zeta^r (1-\zeta)^q d\zeta$$

$$= B(p+q+r+3, s+1)\cdot B(q+r+2, p+1)$$

$$\cdot B(r+1, q+1)$$

$$= \frac{\Gamma(p+q+r+3)\cdot\Gamma(s+1)\cdot\Gamma(q+r+2)}{\Gamma(p+q+r+s+4)\cdot\Gamma(p+q+r+3)}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(r+1)\cdot\Gamma(q+1)}{\cdot\Gamma(q+r+2)}$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(s+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

§7. 利用三重积分计算体积法

域的体积 V 由下公式来表示

$$V=\iiint_V dxdydz.$$

求由下列曲面所界的体积:

4101. $z=x^2+y^2, z=2x^2+2y^2, y=x, y=x^2$.

解 域 V 为

$0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant x, x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2x^2+2y^2$,

故体积为 $V=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x dy\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz$

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x (x^2+y^2)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{1}{3}x^6\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{21}x^7\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{35}.$$

4102. $z=x+y, z=xy, x+y=1, x=0, y=0$.

解 域 V 为

$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x, xy\leqslant z\leqslant x+y^{*)}$,

故体积为

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_{xy}^{x+y} dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y-xy)dy$$

$$= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^3}{2} \right] dx = \frac{7}{24}.$$

*）因为 $0 \leqslant y \leqslant 1$，故有 $xy \leqslant z \leqslant x + y$.

4103. $x^2 + z^2 = a^2, x + y = \pm a, x-y = \pm a$.

解
$$V = 8\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz$$
$$= 8\int_0^a (a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$= 8a\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \right)\Bigg|_0^a + \frac{8}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a$$
$$= \frac{2a^3}{3}(3\pi-4).$$

4104. $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2+y^2}\ (a > 0)$.

解 对立体 V 在 Oxy 平面上的射影作极坐标变换
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$
则域 V 为
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a, \frac{r^2}{a} \leqslant z \leqslant r,$$
且有 $|I| = r$. 于是，体积为
$$V = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\,dr \int_{\frac{r^2}{a}}^{r} dz$$
$$= 2\pi \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^3}{a} \right) dr = \frac{\pi a^3}{6}.$$

4105. $az = a^2-x^2-y^2, z = a-x-y, x = 0, y = 0, z = 0\ (a > 0)$.

解 由 $az = a^2-x^2-y^2, x = 0, y = 0, z = 0$ 所界的体积

为

$$V_1 = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}} \left(\int_0^{\frac{a^2-x^2-y^2}{a}} dz\right) dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{a^2-r^2}{a} r dr = \frac{\pi a^3}{8}.$$

由 $z = a-x-y, x = 0, y = 0, z = 0$ 所界的体积为

$$V_2 = \iiint\limits_{\substack{x+y+z\leqslant a\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}} dxdydz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} dz = \frac{a^3}{6}.$$

于是,所求的体积为

$$V = V_1 - V_2 = \frac{a^3}{24}(3\pi - 4).$$

4106. $z = 6-x^2-y^2, z = \sqrt{x^2+y^2}$.

解 引用圆柱坐标,则域 V 为

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 2, r \leqslant z \leqslant 6-r^2$.

于是,体积为

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_r^{6-r^2} dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr = \frac{32\pi}{3}.$$

变换为球坐标或圆柱坐标,以计算曲面所界的体积:

4107. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leqslant z^2$.

解 变换为圆柱坐标,则有

$r^2 + z^2 = 2az$ 及 $r^2 \leqslant z^2$.

因而域 V 为

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a, r \leqslant z \leqslant a + \sqrt{a^2-r^2}$ *).

于是,体积为

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}dz$$

$$=2\pi\int_0^a r(a+\sqrt{a^2-r^2}-r)dr$$

$$=2\pi\left(\frac{ar^2}{2}-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\pi a^3.$$

*）球面的方程应该是 $z=a\pm\sqrt{a^2-r^2}$，但因体积 V 的一部分为球 $x^2+y^2+z^2=2az$ 的上半部，故取

$$z=a+\sqrt{a^2-r^2}.$$

4108. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

解 变换为球坐标，则域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant a\sqrt{\cos 2\psi}.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\psi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\psi}}r^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\psi\cdot(\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}}d\psi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}d(\sin\psi)$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt\ ^{*)}$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}.$$

*）作代换 $\sqrt{2}x=\sin t$.

4109. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

解 立体在第一,第三,第六及第八卦限内,对于这些卦限分别有:

$x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$; $x \leqslant 0, y \leqslant 0, z \geqslant 0$;

$x \leqslant 0, y \geqslant 0, z \leqslant 0$; $x \geqslant 0, y \leqslant 0, z \leqslant 0$.

立体在这四个卦限内的各部分,一对一对地对称于坐标轴之一。这是因为左端及右端当 x, y, z 中的任何两个同时变号时等式不变.

变换为球坐标,计算得体积

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{3\cos^3\psi\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi}} r^2\cos\psi dr$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\psi\sin\psi d\psi$$

$$= 4\left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos^4\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

4110. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2 (z \geqslant 0)(0 < a < b)$.

解 变换为球坐标,得域 V 为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad \frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad a \leqslant r \leqslant b.$$

于是,体积为

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_a^b r^2\cos\psi dr$$

$$= 2\pi\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi\right]\left(\int_a^b r^2 dr\right)$$

$$= \frac{\pi(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)}{3}.$$

在下列各例中最好利用普遍的极坐标

r,φ 及 $\psi(r \geqslant 0; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2})$，

根据下列各式来引入它们

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,$$
$$y = br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,$$
$$z = cr\sin^{\beta}\psi$$

$(a,b,c,\alpha,\beta$ 为常数)，并且

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = \alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

计算下列曲面所界的体积：

4111. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h}$.

解 令 $x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\psi$，则域的 $\frac{1}{4}$ 部分(第一卦限内)为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant \sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}.$$

于是，体积为

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}} abcr^2\cos\psi dr \\ &= \frac{4a^2bc}{3h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi d\psi\right) \\ &= \frac{\pi a^2bc}{3h}. \end{aligned}$$

4112. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

解 令 $x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\psi$，并利用对称性，即得体积

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos\psi} abcr^2\cos\psi d$$

$$= 8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\psi d\psi$$

$$= \frac{4\pi abc}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}abc.$$

4113. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$

解 令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z$，则 r 满足方程

$r^4 + r^2 - 1 = 0.$

解得 $r = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$. 于是，体积为

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} abr dr \int_{cr^2}^{c\sqrt{1-r^2}} dz$$

$$= 2\pi abc \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r(\sqrt{1-r^2} - r^2) dr$$

$$= 2\pi abc\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4\right]\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$$

$$= \frac{5\pi abc(3 - \sqrt{5})}{12}.$$

4114. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

解 令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z$，则得体积

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr dr \int_{c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}^{c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}} dz$$

$$= 4\pi abc \int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{1}{4}} dr$$

$$= 4\pi abc\left(\quad\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{4}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{5}\pi abc.$$

4115. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

解 令 $x = ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi, y = br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$,
$z = cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi$,

则有 $|I| = \frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi$ 且 $\frac{1}{8}$ 域 V（第一卦限内）为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1.$$

于是,体积为

$$\begin{aligned}
V &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 \frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi dr \\
&= \frac{2}{3}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}}\psi d\psi \\
&= \frac{2}{3}\pi abc \cdot \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^{*)} \\
&= \frac{2}{3}\pi abc \cdot \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{3}\pi abc \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{3}\pi abc \cdot \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)^{**)}}{\sqrt{2}\,\pi} \\
&= \frac{1}{3}abc\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

*） 利用 3856 题的结果.

**） 利用余元公式:$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$.

利用适当的变量代换,以计算由曲面所界的体积(假定参数是正的):

4116. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}(x>0,y>0,z>0)$.

解 令 $x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi, y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi$,

$z=cr\sin^2\psi$,则有 $|I|=4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$,且域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

$$0\leqslant r\leqslant\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi.$$

于是,体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi}4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi dr$$

$$=\frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)^3d\varphi$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9\psi\sin\psi d\psi$$

$$=\frac{2}{15}abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{h^3}\cos^7\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right.$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b^3}{k^3}\cos\varphi\sin^7\varphi\,d\varphi$$

$$+3\cdot\frac{a^2b}{h^2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi$$

$$\left.+3\cdot\frac{ab^2}{hk^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^5\varphi\,d\varphi\right)$$

$$=\frac{2}{15}abc\left(\frac{a^3}{8h^3}+\frac{b^3}{8k^3}+3\cdot\frac{a^2b}{h^2k}\cdot\frac{1}{24}+3\cdot\frac{ab^2}{hk^2}\cdot\frac{1}{24}\right)^{*)}$$

$$=\frac{1}{60}abc\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

*） 利用 3856 题的结果.

4117. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}\quad(x>0,y>0,z>0)$.

解 令 $x = ar\cos^2\varphi\cos^2\psi$, $y = br\sin^2\varphi\cos^2\psi$.

$z = cr\sin^2\psi$,则有 $|I| = 4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$,且域 V 为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant \cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi.$$

于是,体积为

$$V = 4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\int_0^{\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi} r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi dr$$

$$= \frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^7\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{15}\psi\sin^7\psi d\psi$$

$$= \frac{4}{3}abc \cdot \frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)\Gamma(4)}{\Gamma(8)} \cdot \frac{1}{2}\frac{\Gamma(8)\Gamma(4)^{*)}}{\Gamma(12)}$$

$$= \frac{1}{3}abc \cdot \frac{3!3!}{7!} \cdot \frac{7! \cdot 3!}{11!} = \frac{abc}{554400}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

4118. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$.

解 令 $x = ar\cos^2\varphi\cos\psi$, $y = br\sin^2\varphi\cos\psi$, $z = cr\sin\psi$,

则有 $|I| = 2abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi$,且域 V 为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1.$$

于是,体积为

$$V = 2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\int_0^1 r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi dr$$

$$= \frac{2}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi = \frac{1}{3}abc.$$

4119. $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y (x > 0, y > 0)$.

解 令 $z = u(x^2 + y^2)$, $xy = v$, $x = yw$,则

$$x=\sqrt{vw},y=\sqrt{\frac{v}{w}},z=u\left(vw+\frac{v}{w}\right).$$

变换的雅哥比式为

$$I=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}} \\ vw+\frac{v}{w} & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(v-\frac{v}{w^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$=-\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right),$$

而域 V 为

$$1\leqslant u\leqslant 2,a^2\leqslant v\leqslant 2a^2,\frac{1}{2}\leqslant w\leqslant 2.$$

于是,体积为

$$V=\int_1^2 du\int_{a^2}^{2a^2} dv\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right)dw$$

$$=\frac{3a^4}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{w^2}\right)dw$$

$$=\frac{9a^4}{4}.$$

4120. $x^2+z^2=a^2,x^2+z^2=b^2,x^2-y^2-z^2=0(x>0).$

解 令 $x=r\cos\varphi,y=y,z=r\sin\varphi$,则域 V 为

$$a\leqslant r\leqslant b,-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},$$

$$-r\sqrt{\cos2\varphi}\leqslant y\leqslant r\sqrt{\cos2\varphi}$$

于是,体积为

$$V=\int_a^b rdr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{-r\sqrt{\cos2\varphi}}^{r\sqrt{\cos2\varphi}}dy$$

$$=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{4})^{*)}}{\Gamma(\frac{5}{4})}$$

$$=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right).^{**)}$$

*） 利用 3856 题的结果.

* *） 利用余元公式有

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{2}\pi.$$

4121. $(x^2+y^2+z^2)^3=\dfrac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

解 采用球坐标：$x=r\cos\varphi\cos\psi, y=r\sin\varphi\cos\psi, z=\gamma\sin\psi$，则域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant a\mathrm{tg}^{\frac{1}{3}}\psi.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{a\mathrm{tg}^{\frac{1}{3}}\psi}r^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi d\psi=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

4122. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{c^2}{z^2}\right)=\dfrac{z}{h}\cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$.

解 令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi, y=br\sin\varphi\cos\psi, z=cr\sin\psi$,

则域 V 的$\frac{1}{4}$部分（第一卦限内）为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant \left(\frac{c}{h}\sin\psi e^{-\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

这是由于 $z \geqslant 0$，故域 V 在 Oxy 平面的上方.

于是，体积为

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{c}{h}\sin\psi e^{-\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{3}}} abcr^2\cos\psi dr \\ &= \frac{4c^2ab}{3h} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\cos\psi e^{-\sin^2\psi} d\psi \\ &= -\frac{\pi abc^2}{3h} e^{-\sin^2\psi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi abc^2}{3h}(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

4123. $\dfrac{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}}{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}} = \dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right), \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, x = 0, x = a.$

解 令 $u = \frac{x}{a}, v = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, w = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$，

则

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc},$$

且域 V 变为

$$0 \leqslant u \leqslant 1, \frac{2}{\pi}w\arcsin w \leqslant v \leqslant 1, -1 \leqslant w \leqslant 1.$$

于是，$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = abc$，且体积为

$$V = abc\int_0^1 du\int_{-1}^1 d\omega\int_{\frac{2}{\pi}\omega\arcsin\omega}^1 dv$$

$$= 2abc\int_0^1 [1 - \frac{2}{\pi}\omega\arcsin\omega]d\omega$$

$$= 2abc - \frac{2abc}{\pi}\int_0^1 \arcsin\omega d(\omega^2)$$

$$= abc + \frac{2abc}{\pi}\int_0^1 \omega^2(1-\omega^2)^{-\frac{1}{2}}d\omega$$

$$= abc + \frac{abc}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= abc + \frac{abc}{\pi}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}abc.$$

4124. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = \ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}, x=0, z=0,$

$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

解 令 $u=\frac{x}{a}, v=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}, \omega=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$，则

$$\frac{D(u,v,\omega)}{D(x,y,z)} = \frac{1}{abc},$$

且域 V 变为

$$0 \leqslant u \leqslant \omega, \omega e^{-u} \leqslant v \leqslant \omega, 0 \leqslant \omega \leqslant 1.$$

于是，$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\omega)} = abc$，且体积为

$$V = abc\int_0^1 d\omega\int_0^\omega du\int_{\omega e^{-u}}^\omega dv$$

$$= abc\int_0^1 (\omega^2 - \omega^2 e^{-\omega})d\omega$$

$$= abc\left(\frac{1}{3} - 2 + 5e^{-1}\right)$$

$$= 5abc\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3}\right).$$

4125. 求曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 将球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$ 分成两部分的体积的比.

解 曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 与球面 $x^2 + y^2 + (z - 2a)^2 = 4a^2$ 的交线为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2 \\ z = a, \end{cases}$$

且有公共的顶点$(0,0,4a)$. 球内位于曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 下方部分的体积为

$$V_1 = \int_0^a dz \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 4az - z^2} dxdy + \int_a^{4a} dz \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 4a^2 - az} dxdy$$

$$= \int_0^a \pi(4az - z^2)dz + \int_a^{4a} \pi(4a^2 - az)dz$$

$$= 2\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi a^3 + 12\pi a^3 - \frac{15}{2}\pi a^3$$

$$= \frac{37}{6}\pi a^3.$$

从而,另一部分的体积

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 - \frac{37}{6}\pi a^3 = \frac{27}{6}\pi a^3.$$

于是,球被曲面所分的两部分体积之比为

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{37}{27}.$$

4126. 求由曲面

$$x^2 + y^2 = az, z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0)$$

所界的体积和表面积.

解 两曲面的交线为圆周

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=a. \end{cases}$$

又曲面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 的顶点为 $(0,0,2a)$. 于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a dz \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant az} dxdy + \int_a^{2a} dz \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(2a-z)^2} dxdy \\ &= \int_0^a \pi az dz + \int_a^{2a} \pi(2a-z)^2 dz \\ &= \frac{\pi a^3}{2} + \frac{\pi a^3}{3} = \frac{5\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

由两曲面方程分别可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{a}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{a},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

于是, 曲面的表面积为

$$\begin{aligned} S = &\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}dxdy \\ &+ \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{2}dxdy \\ = &\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}a^2 rdr + \sqrt{2}\pi a^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1).$$

4127. 求由平面

$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3.$$

所界平行六面体的体积，设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

解 令

$$a_1x + b_1y + c_1z = u,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = v,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = \omega,$$

则有$\frac{D(u,v,\omega)}{D(x,y,z)} = \Delta$. 于是，$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\omega)} = \frac{1}{\Delta}$，且体积为

$$V = \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} \frac{1}{|\Delta|} d\omega = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

4128. 求由曲面

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$$

所界的体积，设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

解 令

$$a_1x + b_1y + c_1z = u,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = v,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = \omega.$$

则有$\dfrac{D(u,v,\omega)}{D(x,y,z)} = \varDelta$. 于是,$\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,\omega)} = \dfrac{1}{\varDelta}$,且体积为

$$V = \frac{1}{|\varDelta|}\iiint\limits_{u^2+v^2+\omega^2\leqslant h^2} du\,dv\,d\omega = \frac{4\pi h^3}{3|\varDelta|}.$$

4129. 求曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n} + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \quad (n > 1)$$

所界的体积.

解 令 $x = ar\cos\varphi\cos\psi$, $y = br\sin\varphi\cos\psi$, $z = cr\sin\psi$,则有 $|I| = abcr^2\cos\psi$,且域 V 的$\dfrac{1}{4}$ 为

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant \gamma \leqslant \sqrt[3]{\frac{c}{h}\cdot\frac{\sin\psi\cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi + \sin^{2n}\psi}}.$$

于是,体积为

$$\begin{aligned}
V &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{c}{h}\cdot\frac{\sin\psi\cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}}} abcr^2\cos\psi\, dr \\
&= \frac{2}{3h}\pi abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\psi\cos^{2n-3}\psi\, d\psi}{\cos^{2n}\psi - \sin^{2n}\psi} \\
&= \frac{2}{3h}\pi abc^2\int_0^1 \frac{t^{2n-3}dt}{t^{2n} + (1-t^2)^n} \\
&= -\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1 \frac{t^{2n-4}d(1-t^2)}{t^{2n} + (1-t^2)^n} \\
&= \frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1 \frac{(1-x)^{n-2}dx}{(1-x)^n + x^n}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1 \frac{\frac{1}{(1-x)^2}dx}{1+(\frac{x}{1-x})^n}$$

$$= \frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} \quad ^{*)}$$

$$= \frac{1}{3h}\pi abc^2 \cdot \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}} \quad ^{**)}$$

$$= \frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{abc^2}{h}.$$

*） 作代换 $t = \frac{x}{1-x}$.

**） 利用 3851 题的结果.

4130. 求在正卦限 $Oxyz(x>0, y>0, z>0)$ 内由曲面

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1(m>0, n>0, p>0)$$

$$x=0, y=0, z=0$$

所界的体积.

解 令

$$x = ar^{\frac{2}{m}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi\cos^{\frac{2}{m}}\psi,$$

$$y = br^{\frac{2}{n}}\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,$$

$$z = cr^{\frac{2}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\psi,$$

则

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = \frac{8abc}{mnp}r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi$$

$$\cdot \sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi.$$

于是,体积为

$$V=\frac{8abc}{mnp}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi d\psi\int_0^1 r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}dr$$

$$=\frac{8abc}{mnp}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\frac{1}{p}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}}{}^{*)}$$

$$=\frac{8abc}{mnp}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}$$

$$\cdot\frac{mnp}{2(mn+np+mp)}$$

$$=\frac{abc}{mn+np+mp}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

§ 8. 三重积分在力学上的应用

1° **物体的质量** 若一物体占有体积 V, $\rho=\rho(x,y,z)$ 为在点 (x,y,z) 的密度,则该物体的质量等于

$$M=\iiint\limits_V\rho dxdydz.$$

2° 物体的重心　物体的重心坐标(x_0, y_0, z_0)按下列公式来计算

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x\,dx\,dy\,dz, \\ y_0 &= \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y\,dx\,dy\,dz, \\ z_0 &= \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

若物体是均匀的，则在公式(1)中可令$\rho = 1$.

3° 转动惯量　积分

$$I_{xy} = \iiint\limits_V \rho z^2\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V \rho x^2\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_V \rho y^2\,dx\,dy\,dz.$$

分别称为物体对于坐标平面的转动惯量.

积分

$$I_l = \iiint\limits_V \rho r^2\,dx\,dy\,dz$$

(其中r为物体的动点(x,y,z)与轴l的距离)称为物体对于某轴l的转动惯量.特别是，对于坐标轴Ox, Oy, Oz分别有

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, I_y = I_{yz} + I_{yx}, I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

积分

$$I_0 = \iiint\limits_V \rho(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$$

称为物体对于坐标原点的转动惯量.

显而易见，有

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

4° 引力场的位　积分

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \rho(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}$$

（其中 V 为物体的体积，$\rho=\rho(\xi,\eta,\zeta)$ 为物体的密度及

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\text{）}$$

称为物体在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿位.

质量为 m 的质点被物体吸引的力在坐标轴 Ox,Oy,Oz 上的射影 X,Y,Z 等于

$$X=km\frac{\partial u}{\partial x}=km\iiint\limits_V\rho\frac{\xi-x}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Y=km\frac{\partial u}{\partial y}=km\iiint\limits_V\rho\frac{\eta-y}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Z=km\frac{\partial u}{\partial z}=km\iiint\limits_V\rho\frac{\zeta-z}{r^3}d\xi d\eta d\zeta.$$

其中 k 为引力定律常数.

4131. 设物体在点 $M(x,y,z)$ 的密度由公式 $\rho=x+y+z$ 所给出，求占有单位体积 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$ 之物体的质量.

解 质量以 M 表示，则按题设有

$$M=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1(x+y+z)dz=\frac{3}{2}.$$

4132. 若物体的密度按规律 $\rho=\rho_0e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$（其中 $\rho_0>0$ 及 $k>0$ 为常数）而变更，求占有无限域 $x^2+y^2+z^2\geqslant 1$ 的物体的质量.

解 若令 $x=r\cos\varphi\cos\psi,y=r\sin\varphi\cos\psi,z=r\sin\psi$，则质量为

$$M=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1}\rho_0e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_1^{+\infty}r^2\rho_0e^{-kr}\cos\psi dr$$

$$=4\pi\rho_0\int_1^{+\infty}r^2e^{-kr}dr$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty} r^2 e^{-kr} \\
&= -\frac{4\pi\rho_0}{k} r^2 de^{-kr}\Big|_1^{+\infty} \\
&\quad + \frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty} 2re^{-kr}dr \\
&= \frac{4\pi\rho_0}{k}e^{-k} - \frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty} rde^{-kr} \\
&= \frac{4\pi\rho_0}{k}e^{-k} - \frac{8\pi\rho_0}{k^2} re^{-kr}\Big|_1^{+\infty} \\
&\quad + \frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty} e^{-kr}dr \\
&= 4\pi\rho_0 e^{-k}\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right).
\end{aligned}
$$

求由下列曲面所界的均匀物体的重心坐标：

4133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c.$

解 若令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z$，则质量为

$$M = ab\int_0^c dz\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{z}{c}} rdr = \frac{\pi abc}{3}.$$

设重心坐标为 x_0, y_0, z_0，由对称性知 $x_0 = y_0 = 0$，而

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \frac{ab}{M}\int_0^c zdz\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{z}{c}} rdr \\
&= \frac{3}{\pi abc}\cdot\frac{\pi abc^2}{4} = \frac{3c}{4}.
\end{aligned}
$$

于是，重心为点$\left(0, 0, \frac{3c}{4}\right)$.

4134. $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0.$

解 物体的质量为

$$M=\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}dz=\frac{1}{6}a^4.$$

重心的横坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a x dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}dz$$

$$=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{a^5}{15}=\frac{2a}{5}.$$

同理可求得 $y_0=\frac{2a}{5}$，而

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}zdz$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^a\Big(\frac{a^5}{10}-\frac{1}{2}a^4x+\frac{4}{3}a^3x^2$$

$$-2a^2x^3+2ax^4-\frac{14}{15}x^5\Big)dx$$

$$=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{7}{180}a^6=\frac{7}{30}a^2.$$

于是，重心的坐标为 $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$，$z_0=\frac{7}{30}a^2$.

4135. $x^2=2pz$，$y^2=2px$，$x=\frac{p}{2}$，$z=0$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz$$

$$=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\frac{p}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{p^3}{28}.$$

重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}}xdx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz$$

$$=\frac{p^4}{72}\cdot\frac{28}{p^3}=\frac{7}{18}p.$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y dy \int_0^{\frac{y^2}{2p}} dz = 0.$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{y^2}{2p}} z dz$$

$$= \frac{p^4}{704} \cdot \frac{28}{p^3} = \frac{7}{176}p.$$

4136. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0.$

解 若令

$$x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi, z = cr\sin\psi,$$

则质量为

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abcr^2\cos\psi dr$$

$$= \frac{1}{6}\pi abc.$$

于是，

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abcr^2\cos\psi \cdot ar\cos\varphi\cos\psi dr$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi d\psi \int_0^1 a^2bcr^3 dr$$

$$= \frac{1}{16}\pi a^2bc \cdot \frac{6}{\pi abc} = \frac{3}{8}a.$$

利用对称性知重心的坐标为 $x_0 = \frac{3}{8}a, y_0 = \frac{3}{8}b, z_0 = \frac{3}{8}c$.

4137. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 (z > 0).$

解 物体的质量为

$$M=\int_0^a dz\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dy\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dx$$

$$=4\int_0^a(a^2-z^2)dz=\frac{8a^3}{3}.$$

于是,

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a dz\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dy\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}xdx=0.$$

同理可得 $y_0=0$,而

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a zdz\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dy\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dx$$

$$=a^4\cdot\frac{3}{8a^3}=\frac{3}{8}a.$$

于是,重心的坐标为 $x_0=y_0=0,z_0=\frac{3}{8}a$.

4138. $x^2+y^2=2z,x+y=z$.

解 由 $x^2+y^2=2z,x+y=z$ 所围成的立体在平面 $z=0$ 上的投影为圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

若引用代换

$$x=1+r\cos\theta,y=1+r\sin\theta,$$

则质量为

$$M=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{r^2}{2}\right)rdr=\pi.$$

于是,

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr$$

$$\int_{1+r(\cos\theta-\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}(1+r\cos\theta)dz$$

$$= \frac{1}{M}\left[\pi + \int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2(1 - \frac{r^2}{2})dr\right]$$

$$= \frac{\pi}{M} = 1.$$

同理可得 $y_0 = 1$，而

$$z_0 = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}} rdr\int_{1-r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)} zdz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}} [3 + (\sin\theta + \cos\theta)(2r - r^3)$$

$$- \frac{1}{4}r^4 - r^2]rdr$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\pi}{3} = \frac{5}{3}.$$

于是，重心坐标为 $x_0 = y_0 = 1, z_0 = \frac{5}{3}$.

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc}(x > 0, y > 0, z > 0)$.

解 作代换：$x = ar\cos\varphi\cos\psi, y = br\sin\varphi\cos\psi$, $z = cr\sin\psi$，则物体的质量为

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi} abcr^2\cos\psi dr$$

$$= \frac{1}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\psi\sin^3\psi d\psi$$

$$= \frac{1}{3}abc\cdot\frac{1}{2}B(2,2)\cdot\frac{1}{2}B(4,2)$$

$$= \frac{1}{12}abc\cdot\frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)}\cdot\frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{abc}{1440}.$$

于是，

$$x_0 = \frac{1}{M}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi$$

$$\int_0^{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi} r^3\cos^2\psi\cos\varphi\,dr$$

$$= \frac{a^2bc}{4M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}\psi\sin^4\psi d\psi$$

$$= \frac{a^2bc}{4M}\cdot\frac{1}{4}B\left(3,\frac{5}{2}\right)B\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{a^2bc}{4M}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(8)}$$

$$= \frac{18a^2bc\pi}{16\cdot 16\cdot 7!}\cdot\frac{1440}{abc} = \frac{9\pi}{448}a.$$

由对称性知，重心坐标为 $x_0 = \frac{9\pi}{448}a$，

$y_0 = \frac{9\pi}{448}b$， $z_0 = \frac{9\pi}{448}c$.

4140. $z = x^2 + y^2$， $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$， $x + y = \pm 1$，

$x - y = \pm 1$.

解 作代换：$x - y = u$， $x + y = v$，则有

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{v-u}{2},$$

$$z = \frac{u^2+v^2}{4} \text{ 及 } z = \frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|I| = \frac{1}{2}$ 及域 V 为：$-1 \leqslant u \leqslant 1$，$-1 \leqslant v \leqslant 1$，

$\frac{u^2+v^2}{4} \leqslant z \leqslant = \frac{u^2+v^2}{2}$. 于是，

$$M = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}dz = \frac{1}{3}.$$

$$x_0=\frac{1}{4M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}(u+v)dz=0,$$

$$y_0=\frac{1}{4M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}(v-u)dz=0,$$

$$z_0=\frac{1}{2M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}zdz$$

$$=\frac{3}{64}\cdot\frac{1}{M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}(u^4+2u^2v^2+v^4)dv$$

$$=\frac{3}{64M}\int_{-1}^{1}\left(2u^4+\frac{4u^2}{3}+\frac{2}{5}\right)du$$

$$=\frac{7}{20},$$

即重心坐标为 $x_0=y_0=0$， $z_0=\frac{7}{20}$.

4141. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$， $x=0$， $y=0$， $z=0$ $(n>0,\quad x>0,\quad y>0,\quad z>0)$.

解 作代换：

$$x=ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,\quad y=br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,$$

$$z=cr\sin^{\frac{2}{n}}\psi,$$

则有 $|I|=\frac{4}{n^2}abcr^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi$. 于是，

$$M=\frac{4}{n^2}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 r^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi$$

$$\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi dr$$

$$=\frac{4}{n^2}abc\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$$

$$
=\frac{abc}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.
$$

重心坐标为

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{M}\cdot\frac{4}{n^2}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi \\
&\quad\cdot\int_0^1 r\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi r^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi \\
&\quad\cdot\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi dr \\
&= \frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\varphi d\varphi \\
&\quad\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{6}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi d\psi \\
&= \frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{n^2}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) \\
&\quad\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{n},\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{4n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} \\
&= \frac{3n^2}{abc}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{a^2bc}{4n^2} \\
&\quad\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} a,$$

同理可求得

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} b,$$

$$z_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} c.$$

4142. 求形状为立方体：

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

的物体的重心坐标，设此物体在点(x,y,z)的密度等于

$$\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

其中$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 < \gamma < 1$.

解 物体的质量为

$$M = \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha} x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Big|_0^1 \cdot \frac{1-\beta}{\beta} y^{\frac{\beta}{1-\beta}} \Big|_0^1 \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} z^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}+1} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \cdot \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

$$\cdot (1-\alpha)\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma} = \alpha,$$

同理可求得 $y_0 = \beta$, $z_0 = \gamma$.

求由下列曲面(参变量是正的)所界均匀物体对于坐标平面的转动惯量:

4143. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

解 $I_{xy} = \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} z^2 dz$

$$= \frac{c^3}{3}\int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3 dy$$

$$= -\frac{bc^3}{12}\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^4 \Bigg|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dx$$

$$= \frac{bc^3}{12}\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^4 dx$$

$$= \frac{abc^3}{60}.$$

利用对称性可得

$$I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}, \quad I_{xz} = \frac{ab^3c}{60}.$$

4144. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

解 若令 $x = ar\cos\varphi\cos\psi$, $y = br\sin\varphi\cos\psi$, $z = cr\sin\psi$,则有

$$I_{xy} = abc^3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^4\cos\psi\sin^2\psi dr$$

$$= \frac{abc^3}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\sin^2\psi d\psi$$

$$= \frac{abc^3}{15} \cdot 2\pi \cdot \sin^3\psi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{15}\pi abc^3.$$

利用对称性可得

$$I_{yz} = \frac{4}{15}\pi a^3bc, \quad I_{zx} = \frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

4145. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c.$

解 若令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi$,则有

$$I_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr dr \int_{cr}^{c} z^2 dz$$

$$= \frac{1}{5}\pi abc^3,$$

$$I_{yz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr dr \int_{cr}^{c} (ar\cos\varphi)^2 dz$$

$$= a^3bc \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^1 (1-r) r^3 dr$$

$$= \frac{1}{20}\pi a^3bc.$$

利用对称性可得

$$I_{zx} = \frac{1}{20}\pi ab^3c.$$

4146. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$

解 若令 $x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi$,则得域 V 为

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant \cos\varphi,$$

$$-c\sqrt{1-r^2} \leqslant z \leqslant c\sqrt{1-r^2}.$$

于是,

$$I_{xy} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} abr dr \int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}} z^2 dz$$

$$= \frac{2}{3}abc^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r dr$$

$$= \frac{2}{15}abc^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 - (\sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}] d\varphi$$

$$= \frac{4}{15}abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^5\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{4}{15}abc^3 (\varphi + \cos\varphi - \frac{2}{3}\cos^3\varphi$$

$$+ \frac{1}{5}\cos^5\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2abc^3}{225}(15\pi - 16).$$

$$I_{yz} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} abr dr \int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}} (ar\cos\varphi)^2 dz$$

$$= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1 - r^2} r^3 dr$$

$$= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt$$

$$= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \Big\{ \int_{\varphi}^{0} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \Big\} d\varphi$$

$$= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big\{ \frac{2}{15}$$

$$+ \int_{\varphi}^{0} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \Big\} \cos^2\varphi d\varphi$$

$$= 2a^3bc\left\{\frac{\pi}{15}\right.$$

$$+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\int_{\varphi}^{0}\sin^2 t\cos^3 t dt\right)\cos^2\varphi d\varphi$$

$$\left.+ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\varphi}^{0}\sin^2 t\cos^2 t dt\right)\cos^2\varphi d\varphi\right\}$$

$$= 2a^3bc\left\{\frac{\pi}{15} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos^2\varphi d\varphi$$

$$\left.+ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos^2\varphi d\varphi\right\}$$

$$= 2a^3bc\left(\frac{\pi}{15} - \frac{92}{1575}\right)$$

$$= \frac{2a^3bc}{1575}(105\pi - 92),$$

$$I_{zx} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{\cos\varphi}abrdr\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}(br\sin\varphi)^2dz$$

$$= 2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{\cos\varphi}\sqrt{1-r^2}r^3\sin^2\varphi dr$$

$$= 2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|$$

$$\cdot \sin t\cos^3 t dt$$

$$= 2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{2}{15}\right.$$

$$\left.+ \int_{\varphi}^{0}|\sin t| \cdot \sin t\cos^3 t \cdot dt\right\}\sin^2\varphi d\varphi$$

$$= 2ab^3c\left\{\frac{\pi}{15} + \int_{0}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi\right.\right.$$

$$-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\Big)\sin^2\varphi d\varphi$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\Big)\sin^2\varphi d\varphi\Big\}$$

$$=2ab^3c\left(\frac{\pi}{15}-\frac{272}{1575}\right)$$

$$=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272).$$

4147. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$, $\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

解 两曲面在 Oxy 平面上的投影为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}=0$，即 $\left(\frac{x}{a}-1\right)^2+\left(\frac{y}{b}-1\right)^2=2$. 若令

$$\frac{x}{a}=1+r\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=1+r\sin\varphi,$$

则得域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2},$$

$$c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]$$

$$\leqslant z\leqslant c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)].$$

于是，

$$I_{xy}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}abrdr$$

$$\int_{c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}z^2dz$$

$$=\frac{1}{3}abc^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r[8+12r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

$$+6r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2-\left(1+\frac{r^2}{2}\right)^3$$

$$-3\left(1+\frac{r^2}{2}\right)^2 r(\cos\varphi-\sin\varphi)$$

$$-3\left(1+\frac{r^2}{2}\right)r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\Big]dr$$

$$=\frac{7}{2}\pi abc^3.$$

$$I_{yz}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}a^3br(1+r\cos\varphi)^2dr$$

$$\int_{c\left(1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}dz$$

$$=a^3bc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r(1+2r\cos\varphi$$

$$+r^2\cos^2\varphi)\left(1-\frac{r^2}{2}\right)dr$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3bc.$$

利用对称性得 $I_{xz}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$.

求由下列曲面所界均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量：

4148. $z=x^2+y^2, x+y=\pm 1, x-y=\pm 1, z=0$.

解 曲面所界的均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量记以 I_z，则

$$I_z=I_{xz}+I_{zy}.$$

若令 $x+y=u, x-y=v$，则有

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2},\quad z=\frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|I|=\frac{1}{2}$. 于是，

$$I_z=\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_0^{\frac{u^2+v^2}{2}}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right.$$

$$+\left(\frac{u+v}{2}\right)^2\Big\}dz$$

$$=\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}\frac{(u^2+v^2)^2}{8}dv=\frac{14}{45}.$$

4149. $x^2+y^2+z^2=2, x^2+y^2=z^2(z>0)$.

解 若令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$,则有

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant 1,\quad r\leqslant z\leqslant\sqrt{2-r^2}.$$

于是,

$$I_z=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\,dr\int_r^{\sqrt{2-r^2}}r^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(r^3\sqrt{2-r^2}-r^4)dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{8\sqrt{2}-7}{15}-\frac{1}{5}\right)d\varphi^{*)}$$

$$=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5).$$

*)作代换 $r=\sqrt{2}\sin t$.

4150. 设球在动点 $P(x,y,z)$ 的密度与该点至球心距离成比例,求质量为 M 的非均匀球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 对于其直径的转动惯量.

解 不失一般性,取 Oz 轴在球内的一段作为直径.若令

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,$$

则质量为

$$M=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^R r^2\cos\psi\cdot kr\,dr=k\pi R^4,$$

由此得 $k=\frac{M}{\pi R^2}$. 从而密度 $\rho=\frac{Mr}{\pi R^4}$. 于是,所求的转动

惯量为

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^2\cos^2\psi \cdot \frac{Mr^3}{\pi R^4}\cos\psi dr$$

$$= \frac{2M}{R^4}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi d\psi\right)\left(\int_0^R r^5 dr\right) = \frac{4MR^2}{9}.$$

4151. 证明等式

$$I_l - I_{l_0} + Md^2.$$

其中 I_l 为物体对于某轴 l 的转动惯量，I_{l_0} 为对于平行于 l 并通过物体重心的轴 l_0 的转动惯量，d 为轴与轴之间的距离及 M 为物体的质量.

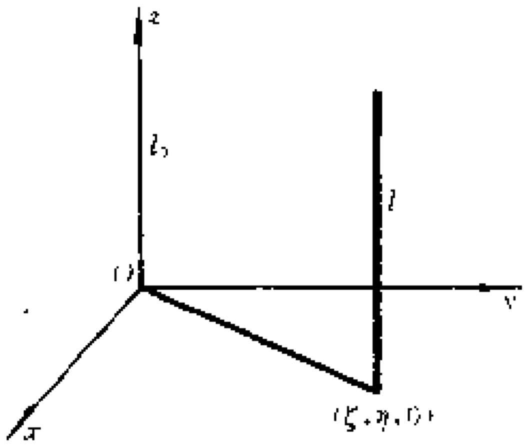

图 8.59

证 以重心为坐标原点 O，z 轴与 l_0 重合，l 与 Oxy 平面的交点为 $(\zeta,\eta,0)$，如图 8.59 所示，则

$$I_l = \iiint\limits_V [(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2]\rho dv$$

$$= \iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho dv + (\zeta^2+\eta^2)$$

$$\cdot \iiint\limits_V \rho dv - 2\zeta\iiint\limits_V x\rho dv - 2\eta\iiint\limits_V y\rho dv \qquad (1)$$

由于重心在原点，故 $x_0 = y_0 = 0$，即

$$x_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x\rho dv = 0$$

及

$$y_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_V y\rho dv = 0,$$

并且 $M = \iiint\limits_V \rho dv, d^2 = \zeta^2 + \eta^2$,代入(1)式,最后得

$$I_l = I_{l_0} + Md^2.$$

4152. 证明:体积为 V 的物体对于过其重心 $O(0,0,0)$ 并与坐标轴成角 α,β,γ 的轴 l 的转动惯量等于

$$I_l = I_x \cos 2\alpha + I_y \cos 2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma.$$

其中 I_x, I_y, I_z 为物体对于坐标轴的转动惯量及

$$K_{xy} = \iiint\limits_V \rho xy dxdydz,$$

$$K_{xz} = \iiint\limits_V \rho xz dxdydz,$$

$$K_{yz} = \iiint\limits_V \rho yz dxdydz$$

为离心距.

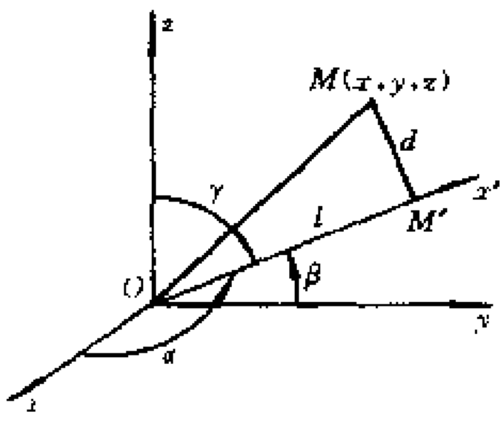

图 8.60

证 如图 8.60 所示.距离

$$d = \frac{|\vec{OM} \times \vec{OM'}|}{|\vec{OM}|}$$

$$= \frac{1}{r}\sqrt{\begin{vmatrix} y & z \\ r\cos\beta & r\cos\gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ r\cos\gamma & r\cos\alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ r\cos\alpha & r\cos\beta \end{vmatrix}^2}$$

其中 $r = |\vec{OM}|$. 由于 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,故有

$$\begin{aligned} d^2 &= (x^2 + y^2)\cos^2\gamma + (y^2 + z^2)\cos^2\alpha \\ &\quad + (z^2 + x^2)\cos^2\beta - 2xy\cos\alpha\cos\beta \\ &\quad - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2xz\cos\alpha\cos\gamma. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} I_l &= \iiint\limits_V \rho d^2 \cdot dxdydz \\ &= \cos^2\gamma \iiint\limits_V \rho \cdot (x^2 + y^2)dxdydz \\ &\quad + \cos^2\alpha \iiint\limits_V \rho \cdot (y^2 + z^2)dxdydz \\ &\quad + \cos^2\beta \iiint\limits_V \rho \cdot (x^2 + z^2)dxdydz \\ &\quad - 2\cos\alpha\cos\beta \iiint\limits_V \rho xydxdydz \\ &\quad - 2\cos\beta\cos\gamma \iiint\limits_V \rho yzdxdydz \\ &\quad - 2\cos\gamma\cos\alpha \iiint\limits_V \rho xzdxdydz \\ &= I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma \\ &\quad - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma \\ &\quad - 2K_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \end{aligned}$$

证毕.

4153. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2, z=\pm h$ 对于直线 $x=y=z$ 的转动惯量.

解 直线 $x=y=z$ 通过圆柱的重心 $O(0,0,0)$ 且具有方向余弦 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 若取极坐标，则有

$$I_x=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_{-h}^{h}\rho_0(r^2\sin^2\varphi+z^2)dz$$
$$=\left(\frac{1}{2}\pi a^4h+\frac{2}{3}\pi a^2h^3\right)\rho_0,$$
$$I_y=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_{-h}^{h}\rho_0(r^2\cos^2\varphi+z^2)dz$$
$$=\left(\frac{1}{2}\pi a^4h+\frac{2}{3}\pi a^2h^3\right)\rho_0,$$
$$I_z=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_{-h}^{h}\rho_0r^2dz=\pi ha^4\rho_0,$$
$$K_{xy}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_{-h}^{h}\rho_0r^2\cos\varphi\sin\varphi dz=0,$$
$$K_{yz}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_{-h}^{h}\rho_0r\sin\varphi\cdot zdz=0,$$
$$K_{zx}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_{-h}^{h}\rho_0\cdot r\cos\varphi\cdot zdz=0,$$

于是，根据 4152 题结果即得

$$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma$$
$$-2k_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$
$$-2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma$$
$$=\frac{\rho_0}{3}\left(\frac{1}{2}\pi a^4h+\frac{2}{3}\pi a^2h^3+\frac{1}{2}\pi a^4h\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}\pi a^2h^3+\pi a^4h\right)=\frac{2}{3}\pi\rho_0a^2h\left(a^2+\frac{2}{3}h^2\right)$$

$$= \frac{M}{3}\left(a^2 + \frac{2}{3}h^2\right),$$

其中 $M = 2\pi\rho_0 a^2 h$ 为圆柱的质量.

4154. 求密度为 ρ_0,由曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

所界的均匀物体对于坐标原点的转动惯量.

解 若令 $x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi$, 则对坐标原点的转动惯量为

$$I_0 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{a\cos\psi} \rho_0 \cdot r^2 \cdot r^2 \cos\psi dr$$

$$= \frac{4\pi\rho_0 a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\psi d\psi$$

$$= \frac{4\pi\rho_0 a^5}{5} \cdot \frac{5\pi^{*)}}{32} = \frac{\pi^2 a^5 \rho_0}{8}.$$

*) 利用 2282 题的结果.

4155. 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ 在点(x,y,z)的牛顿位.

解 由对称性显然可知,所求的牛顿位与 ξ、η,ζ 轴取的方向无关. 今取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$,即得牛顿位

$$u(x,y,z) = \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leqslant R^2} \rho_0 \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}}$$

$$= \rho_0 \int_{-R}^{R} d\zeta \iint\limits_{\xi^2+\eta^2 \leqslant R^2 - \zeta^2} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}},$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

积分之,得

$$u(x,y,z)$$

$$= 2\pi\rho_0 \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - 2r\zeta + r^2} - |\zeta - r|) d\zeta.$$

由于

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - 2r\zeta + r^2}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{3}r[(R+r)^3 - |R-r|^3]$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3}R^3\frac{1}{r} + 2rR, & (r > R); \\ \frac{2}{3}r^2 - R^2, & (r \leqslant R), \end{cases}$$

及

$$\int_{-R}^{R} |\zeta - r|\,d\zeta = \begin{cases} 2Rr & (r > R), \\ r^2 + R^2 & (r \leqslant R). \end{cases}$$

因而,最后得

$$u(x,y,z) = \begin{cases} \frac{4}{3r}\pi R^3\rho_0 & (r > R), \\ 2\pi\rho_0 \cdot \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right) & (r \leqslant R). \end{cases}$$

由以上结果可以得到下面两个推论:

1. 在球外一点上的牛顿位,与将球的全部质量集中在它的中心处时一样;

2. 如考察一个内半径为 R_1 而外半径为 R_2 的空心球,则它在位于其空隙处的一点($r < R$)上的牛顿位可表示成差

$$u(x,y,z) = u_2(x,y,z) - u_1(x,y,z)$$

$$= \left(R_2^2 - \frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0 - \left(R_1^2 - \frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0$$

$$= 2\pi(R_2^2 - R_1^2)\rho_0.$$

它与 r 无关，故空心球体在其空隙范围内的位势保持一个常数值.

4156. 设密度 $\rho = f(R)$，其中 f 为已知函数，且 $R = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$，求球壳层 $R_1^2 \leqslant \xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R_2^2$ 在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿位.

解 取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$，即得牛顿位

$$u(x,y,z) = \iiint\limits_{R_1^2 \leqslant \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leqslant R_2^2} f(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}) \cdot \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}},$$

其中 $r = x^2 + y^2 + z^2$.

若引入球坐标，即得

$$\begin{aligned}
&u(x,y,z)\\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho)\cos\psi \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}}\\
&= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 f(\rho) \cdot \frac{\cos\psi d\psi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}}\\
&= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \cdot \left(-\frac{1}{\rho r}\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho\\
&= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \left\{-\frac{1}{\rho r}[|\rho - r| - (\rho + r)]\right\} d\rho
\end{aligned}$$

$$
=\begin{cases}4\pi\int_{R_1}^{R_2}\rho f(\rho)d\rho, & \text{当 } \rho>r;\\ 4\pi\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{r}f(\rho)d\rho, & \text{当 } \rho\leqslant r.\end{cases}
$$

合并之，最后得

$$
u(x,y,z)=4\pi\int_{R_1}^{R_2}f(\rho)\min\left(\frac{\rho^2}{r},\rho\right)d\rho.
$$

4157. 求有固定密度 ρ_0 的圆柱 $\xi^2-\eta^2\leqslant a^2, 0\leqslant\zeta\leqslant h$ 在点 $P(0,0,z)$ 的牛顿位.

解 若引用柱坐标，即得

$$
\begin{aligned}
&u(x,y,z)\\
&=\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h d\zeta\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{r^2+(\zeta-z)^2}}\\
&=2\pi\rho_0\int_0^h\sqrt{r^2+(\zeta-z)^2}\Big|_0^a d\zeta\\
&=2\pi\rho_0\int_0^h\left[\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}-|\zeta-z|\right]d\zeta\\
&=2\pi\rho_0\Big[\frac{(\zeta-z)}{2}\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}\\
&\quad+\frac{a^2}{2}ln\left|(\zeta-z)+\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}\right|\\
&\quad-\frac{(\zeta-z)|\zeta-z|}{2}\Big]\Big|_0^h\\
&=\pi\rho_0\Big\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}+z\sqrt{a^2+z^2}\\
&\quad-[(h-z)|h-z|+z|z|]\\
&\quad+a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{-z+\sqrt{a^2+z^2}}\right|\Big\}.
\end{aligned}
$$

4158. 半径为 R 和质量为 M 的均匀球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 以怎样的力吸引质量为 m 的质点 $P(0,0,a)$?

解 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零，即 $X=Y=0$，而在 Oz 轴上的射影为

$$
\begin{aligned}
Z &= k\rho_0 m \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2} \frac{(\zeta-a)d\xi d\eta d\zeta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)d\zeta \\
&\quad \iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\zeta^2} \frac{d\xi d\eta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)d\zeta \\
&\quad \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{R^2-\zeta^2}} \frac{rdr}{[r^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= 2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)\left(\frac{1}{|\zeta-a|}\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}\right)d\zeta \\
&= 2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\zeta-a)d\zeta \\
&\quad -2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}\frac{(\zeta-a)d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}
\end{aligned}
$$

其中 $\rho_0=\dfrac{3M}{4\pi R^3}$，

分别求上述两个积分：

当 $a\geqslant R$ 时，

$$\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\zeta-a)d\zeta=-\int_{-R}^{R}d\zeta=-2R,$$

当 $a<R$ 时，

$$\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\zeta-a)d\zeta=-\int_{-R}^{a}d\zeta+\int_{a}^{R}d\zeta=-2a;$$

而

$$\int_{-R}^{R}\frac{(\zeta-a)d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\frac{R^2+a^2-2a\zeta-(R^2+a^2)}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}d\zeta$$

$$-a\int_{-R}^{R}\frac{d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\,d\zeta$$

$$+\left(\frac{R^2+a^2}{2a}-a\right)\int_{-R}^{R}\frac{d\zeta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}}$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\,d\zeta$$

$$+\frac{R^2-a^2}{2a}\int_{-R}^{R}\frac{d\zeta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}},$$

当 $a\geqslant R$ 时，将上式右端分别积分，得结果：

$$\left[\frac{1}{4a^2}(R^2+a^2-2a\zeta)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{R^2-a^2}{2a}\left(-\frac{1}{2a}\right)\right.$$

$$\left.\cdot 2\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\right]\Bigg|_{-R}^{R}$$

$$=\frac{1}{6a^2}[(a-R)^3-(a+R)^3]$$

$$-\frac{R^2-a^2}{2a^2}[(a-R)-(a+R)]$$

$$=\frac{2R^3}{3a^2}-2R;$$

当 $a<R$ 时，积分得结果：

$$\frac{1}{6a^2}[(R-a)^3-(a+R)^3]$$

$$-\frac{R^2-a^2}{2a^2}[(R-a)-(R+a)]$$

$$= -\frac{4a}{3}.$$

于是，当 $a \geqslant R$ 时，则

$$Z = 2\pi k m \rho_0 \left(-2R - \frac{2R^3}{3a^2} + 2R \right)$$

$$= -\frac{4}{3a^2}\pi k m \rho_0 R^3 = -\frac{kMm}{a^2};$$

当 $a < R$ 时，则

$$Z = 2\pi k m \rho_0 \left(-2a + \frac{4a}{3} \right)$$

$$= -\frac{4}{3}\pi a k m \rho_0 = -\frac{kMm}{R^3}a.$$

从以上结果可以得到两个推论：

1. 位于球外的一点($a \geqslant R$)因球体而受到的吸引力相当于将球体的全部质量 $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$ 集中在它的中心处时受到的引力，引力的方向朝向球心；

2. 对于在球里面的一点($a < R$)来说，吸引力与 R 无关，其大小与 $R = a$ 时的情况一样，即在点 P 外面的球壳部分对 P 点的引力为零.

4159. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱 $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2, 0 \leqslant \zeta \leqslant h$ 对具有单位质量的质点 $P(0,0,z)$ 的吸引力.

解 由对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零，即 $X = Y = 0$. 若引用柱坐标，即得引力在 Oz 轴上的射影为

$$Z = k\rho_0 \iint\limits_{\xi^2+\eta^2=a^2} d\xi d\eta \int_0^h \frac{(\zeta - z)d\zeta}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= k\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_0^h \frac{(\zeta - z)d\zeta}{[r^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\pi k\rho_0\int_0^a r\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}\right)dr$$
$$= 2\pi k\rho_0[\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}$$
$$-|z|+|h-z|].$$

易知，

当$0\leqslant z<\frac{h}{2}$时，$z>0$，此时吸引力朝着向上的铅垂线；

当$\frac{h}{2}<z\leqslant h$时，$z<0$，此时吸引力朝着向下的铅垂线；

当$Z=\frac{h}{2}$时，$Z=0$，引力为零.

4160. 求密度为ρ_0的均匀球锥体对于在其顶点为一单位质量的质点的吸引力，设球的半径为R，而轴截面的扇形的角等于$2a$.

解 由对称性知，引力在Ox轴和Oy轴上的射影为零，即$X=Y=0$. 若引用球坐标，即得引力在Oz轴上的射影为

$$Z=\iiint\limits_V\frac{k\rho_0 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}dxdydz$$
$$=k\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin\psi d\psi\int_0^R dr$$
$$=k\pi R\rho_0\sin^2 a.$$

§ 9. 二重和三重广义积分

1° 无界限域的情形 若二维的域 Ω 是无界的及函数 $f(x,y)$ 在域 Ω 上连续，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)dxdy, \tag{1}$$

其中 Ω_n 为域 Ω 中可求积的有界封闭子域的任意序列，这个叙列可以盈满域 Ω. 若在右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关，则对应的积分称为收敛的；在相反的情形称为发散的.

同样定义出连续函数展布在无界的三维域上的三重广义积分.

2° 不连续函数的情形 若函数 $f(x,y)$ 在有界封闭域 Ω 内除了点 $P(a,b)$ 而外处处是连续的，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\Omega - U_\varepsilon} f(x,y)dxdy, \tag{2}$$

其中 U_ε 是点 P 的 ε 邻域，当极限存在的情形，所研究的积分称为收敛的；在相反的情形称为发散的.

假定在点 $P(a,b)$ 的邻近有等式

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{r^{\alpha}},$$

其中函数 $\varphi(x,y)$ 的绝对值是介于二正数 m 和 M 之间，且

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

则 1) 当 $\alpha < 2$ 时，积分(2) 收敛；2) 当 $\alpha \geqslant 2$ 时，积分(2) 发散.

若函数 $f(x,y)$ 有不连续的线，同样可定义出广义积分(2).

不连续函数的广义积分定义易于引伸到三重积分的情形.

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性

$(0 < m \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant M)$：

4161. $\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}dxdy.$

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛,即知积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}dxdy$$

与积分 $\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy$ 同时收敛同时发散. 由于$\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$是正的,故引用极坐标,得

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{+\infty}\frac{r}{r^{2p}}dr=\begin{cases}\frac{\pi}{p-1},\text{若 } p>1;\\ +\infty,\text{若 } p\leqslant 1.\end{cases}$$

由此可知,原积分 $\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}dxdy$ 当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant 1$ 时发散.

4162. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$

解 由于被积函数是正的,并且关于 Ox 轴和 Oy 轴都对称,故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$$

$$= 4\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p}\right)\left(\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^q}\right).$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p\cdot\frac{1}{1+x^p}=1$，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，$p<1$ 时发散，$p=1$ 时显然也发散 $\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x}=+\infty\right)$. 因此，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p}=\begin{cases}\text{有限数，当 } p>1 \text{ 时；}\\ +\infty, \quad \text{当 } p\leqslant 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

同理有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^q}=\begin{cases}\text{有限数，当 } q>1 \text{ 时；}\\ +\infty, \quad \text{当 } q\leqslant 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

由此可知，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ 仅当 $p>1$ 且 $q>1$ 时收敛，其它情形均发散.

4163. $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2+y^2)^p}dxdy$

解 仿 4161 题，可知积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}dxdy$ 与积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$ 同时收敛同时发散. 由于被积函数是正的，故

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$=\int_0^1 dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$=2\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p};$$

由于，当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^2)^p}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p}(\text{若 } p\geqslant 0),$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^2)^p}\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p}(\text{若 } p<0),$$

故

$$2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^2)^p}\leqslant\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$\leqslant 2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p}(p\geqslant 0),$$

若 $p<0$,则有相反的不等式.

对于 $a>0$,由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{2p}\frac{1}{(a^2+x^2)^p}=1,$$

故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^p}$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛,$p<\frac{1}{2}$ 时发散.实际上,此积分当 $p=\frac{1}{2}$ 时也发散,因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\Big|_0^{+\infty}=+\infty.$$

由此可知:积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$,从而积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}dxdy$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛,当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散.

4164. $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}(p>0,q>0).$

解 由对称性及被积函数的非负性,有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+y\geqslant 1}}\frac{dxdy}{x^p+y^q}$$

$$=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{dxdy}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{dxdy}{x^p+y^q},$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\leqslant 2\}$,$\Omega_2=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\geqslant 2\}$,令 $\Omega_3=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2\}$,易知,当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2$ 时必有 $x+y\geqslant 1$(因若 $x+y<1$,则必有 $0\leqslant x<1,0\leqslant y<1$,从而 $0\leqslant x^p<1,0\leqslant y^q<1$,这就会得出 $x^p+y^q<2$),故 $\Omega_2=\Omega_3$. 由于 Ω_1 是有界闭区域,故(1)式右端第一个积分为常义积分,因此广义积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分 $\iint\limits_{\Omega_3}\frac{dxdy}{x^p+y^q}$ 的敛散性,在此积分中作变量代换

$$x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta,y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta,$$

则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是,注意到被积函数是非负的,得

$$\iint\limits_{\Omega_2}\frac{dxdy}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta d\theta$$

$$\cdot\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}dr.$$

由 3856 题的结果知，右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta d\theta(p>0,q>0)$$

恒收敛，且其值为$\frac{1}{2}B(\frac{1}{q},\frac{1}{p})$；而第二个积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}dr$$

当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3<-1$(即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$)时收敛，当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\geqslant-1$(即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant1$)时发散.

综上所述，可知广义积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant1}\frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$$

仅当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$时收敛.

4165. $\iint\limits_{x+y\geqslant1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy.$

解 设此积分收敛.以 I 表其值.先设 $p<1$.

令 $\Omega_n=\{(x,y)|1\leqslant x-y\leqslant2n\pi,$

$-2n\pi\leqslant x-y\leqslant2n\pi\}$,

$\Omega'_n=\{(x,y)|1\leqslant x+y\leqslant2n\pi-\frac{\pi}{4},$

$-2n\pi\leqslant x-y\leqslant2n\pi\}$,

$\omega_n=\{(x,y)|2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant2n\pi,$

$-2n\pi\leqslant x-y\leqslant2n\pi\}$,

其中 $n=1,2,3,\cdots$,则显然有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy=I,$$

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\tilde{\Omega}_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy = I.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\iint\limits_{\Omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy \right.\\
&\qquad \left. - \iint\limits_{\tilde{\Omega}_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy\right] \\
&= I - I = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

由于 $\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$，今在(1)式左端的积分中作变量代换 $x+y=u, x-y=v\left(\text{即}\ x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}\right)$，并注意到 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{2}$，得

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}du\int_{-2n\pi}^{2n\pi}\frac{\cos v - \cos u}{u^p}dv \\
&= -n\pi\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}du;
\end{aligned}$$

而

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}du \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{du}{u^p}$$

$$\geqslant \begin{cases} \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{(2n\pi)^p}, \text{当 } p > 0 \text{ 时;} \\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}} \quad, \text{当 } p \leqslant 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

由此可知(注意前面假定 $p < 1$)

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = -\infty,$$

此显然与(1)式矛盾.

现设 $p \geqslant 1$. 令

$$\omega'_n = \{(x,y) \mid 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant x + y \leqslant 2n\pi,$$

$$-2\pi n^{[p]+2} \leqslant x - y \leqslant 2\pi n^{[p]+2}\},$$

仿上,应有

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = 0. \tag{2}$$

但另一方面,和上面一样,作代换 $x + y = u, x - y = v$ 后,有

$$\iint\limits_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy$$

$$= -\pi n^{[p]-2} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du.$$

同样,由

$$\int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du \geqslant \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2n\pi)^p},$$

即得

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = -\infty,$$

此显然与(2)式矛盾.

综上所述，可知：不论 p 为何值，积分

$$\iint\limits_{x+y\geqslant 1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dxdy$$

都发散.

4166. 证明：若连续函数 $f(x,y)$ 不为负及 $S_n(n=1,2,\cdots)$ 为有界闭域的任一叙列，这个叙列可以盖满域 S，则

$$\iint\limits_{S}f(x,y)dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)dxdy,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

证 取定一有界闭域的叙列 S'_n，它盖满 S 并且 $S'_1\subset S'_2\subset\cdots\subset S'_n\subset\cdots\subset S$. 由于 $f(x,y)$ 在 S 上非负，故积分叙列 $\iint\limits_{S'_n}f(x,y)dxdy$ 是递增的，从而极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S'_n}f(x,y)dxdy \tag{1}$$

存在（是有限数或是 $+\infty$）. 我们要证

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)dxdy=I. \tag{2}$$

先设 I 为有限数. 任给 $\varepsilon>0$，由(1)式知，存在 N，使当 $n\geqslant N$ 时，恒有

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S'_n}f(x,y)dxdy<I+\varepsilon. \tag{3}$$

又存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，$S_n\supset S'_N$. 从而，根据 $f(x,y)$ 的非负性以及(3)式，得

$$\iint\limits_{S_n}f(x,y)dxdy\geqslant\iint\limits_{S'_N}f(x,y)dxdy>I-\varepsilon.$$

另一方面，对每个固定的 $n\geqslant n_0$ 又必存在某个充分大的

$k_n(\geqslant N)$ 使 $S'_{k_n} \supset S_n$. 于是,再由(3)式得

$$\iint\limits_{S_n} f(x,y)dxdy \leqslant \iint\limits_{S'_{k_n}} f(x,y)dxdy < I + \varepsilon.$$

由此可知,当 $n \geqslant n_0$ 时,恒有

$$I - \varepsilon < \iint\limits_{S_n} f(x,y)dxdy < I + \varepsilon,$$

故(2)式成立.

次设 $I = +\infty$. 任给 $M > 0$,由(1)式知,存在 N_1,使

$$\iint\limits_{S'_{N_1}} f(x,y)dxdy > M.$$

又存在 n_1,使当 $n \geqslant n_1$ 时,恒有 $S_n \supset S'_{N_1}$,从而此时

$$\iint\limits_{S_n} f(x,y)dxdy \geqslant \iint\limits_{S'_{N_1}} f(x,y)dxdy > M,$$

故(2)式成立. 证毕.

4167. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n \\ |y|\leqslant n}} \sin(x^2 + y^2)dxdy = \pi,$$

但

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2 + y^2)dxdy = 0$$

(n 为自然数).

证 利用极坐标,我们有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2 + y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2n\pi}} r \sin r^2 dr$$

$$= \pi(1 - \cos 2n\pi) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

故

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant 2n\pi} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0.$$

但由对称性,有

$$\iint\limits_{\substack{|x| \leqslant n \\ |y| \leqslant n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

$$= 4 \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 \leqslant y \leqslant n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

$$= 4 \int_0^n dy \int_0^n (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) dx$$

$$= 4 \left(\int_0^n \cos y^2 dy \right) \left(\int_0^n \sin x^2 dx \right)$$

$$+ 4 \left(\int_0^n \cos x^2 dx \right) \left(\int_0^n \sin y^2 dy \right)$$

$$= 8 \left(\int_0^n \cos x^2 dx \right) \left(\int_0^n \sin x^2 dx \right).$$

根据 3830 题的结果,可知

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

故

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n \sin x^2 dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

从而,得

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{\substack{|x| \leqslant n \\ |y| \leqslant n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

4168. 证明纵使累次积分

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

及 $$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

收敛，但积分

$$\iint\limits_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

发散.

证 先证两个累次积分收敛. 我们有

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{2y} \cdot \frac{2y dy}{(x^2 + y^2)^2} - \int_1^{+\infty} \frac{y}{2} \cdot \frac{2y dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= -\frac{x^2}{2y(x^2 + y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dy}{2y^2(x^2 + y^2)}$$

$$+ \frac{y}{2(x^2 + y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{dy}{2(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{x^2}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) dy$$

$$- \frac{1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dy}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2 + 1},$$

故 $$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$= -\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = -\frac{\pi}{4};$$

同理(利用已算得的结果)

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$= - \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$= - \int_1^{+\infty} \left(- \frac{1}{y^2 + 1} \right) dy = \frac{\pi}{4},$$

故两个累次积分都收敛.

次证积分

$$\iint\limits_{x \geqslant 1, y \geqslant 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \tag{1}$$

发散. 为此只要证积分

$$\iint\limits_{x \geqslant 1, 1 \leqslant y \leqslant x} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \tag{2}$$

发散即可(因为如果积分(1)收敛,则绝对值积分

$$\iint\limits_{x \geqslant 1, y \geqslant 1} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy \tag{3}$$

必收敛. 从而在小一点的区域上的积分

$$\iint\limits_{x \geqslant 1, 1 \leqslant y \leqslant x} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy$$

更收敛. 由此可知,积分(2)收敛). 由于,

$$I_n = \iint\limits_{\substack{1 \leqslant x \leqslant n \\ 1 \leqslant y \leqslant x}} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

$$= \int_1^n dx \int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy,$$

仿上,利用部分积分法,容易算得

$$\int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$= -\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)}\Big|_{y=1}^{y=x} - \int_1^x \frac{x^2 dy}{2y^2(x^2+y^2)}$$

$$+ \frac{y}{2(x^2+y^2)}\Big|_{y=1}^{y=x} - \int_1^x \frac{dy}{2(x^2+y^2)}$$

$$= -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2x},$$

故

$$I_n = \int_1^n \left(-\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2x}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} n + \frac{1}{2}\ln n \to +\infty (\text{当 } n \to \infty \text{ 时}),$$

由此可知积分(2) 发散.

注意,也可用反证法证明积分(1) 发散. 假定积分(1) 收敛. 于是积分(3) 收敛. 但恒有

$$\iint\limits_{x \geqslant 1, y \geqslant 1} \left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dx, \tag{4}$$

故(4) 式中两个累次积分都收敛. 又由前面已证不取绝对值的两个累次积分

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy$$

与

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx$$

都收敛,故知

$$\iint\limits_{x \geqslant 1, y \geqslant 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx dy$$

$$=\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=-\frac{\pi}{4},$$

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,y\geqslant 1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

$$=\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=\frac{\pi}{4},$$

这是不可能的.证毕.

计算下列积分:

4169. $\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\ x\geqslant 1}}\frac{dxdy}{x^py^q}$.

解 由于被积函数非负,故

$$I=\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\ x\geqslant 1}}\frac{dxdy}{x^py^q}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{dy}{y^q}.$$

而当 $q>1$ 时,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{dy}{y^q}=\frac{x^{q-1}}{q-1}.$$

(注意,当 $q\leqslant 1$ 时,此积分发散,从而 $I=+\infty$);又当 $p>q$ 时,

$$I=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty}x^{q-p-1}dx=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

(注意,当 $p\leqslant q$ 时,此积分发散,$I=+\infty$).

综上所述,可知:当 $p>q>1$ 时,

$$\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\ x\geqslant 1}}\frac{dxdy}{x^py^q}=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

4170. $\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1\\ 0\leqslant x\leqslant 1}}\frac{dxdy}{(x+y)^p}$.

解 由于被积函数非负,故

$$I = \iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} \frac{dxdy}{(x+y)^p}$$

$$= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{+\infty} \frac{dy}{(x+y)^p}.$$

当 $p>1$ 时，

$$\int_{1-x}^{+\infty} \frac{dy}{(x+y)^p}$$

$$= -\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(x+y)^{p-1}}\Bigg|_{y=1-x}^{y\to+\infty} = \frac{1}{p-1}.$$

(注意，当 $p\leqslant 1$ 时，积分发散，$I=+\infty$)，故

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{p-1} = \frac{1}{p-1} \quad (\text{当 } p>1 \text{ 时}).$$

4171. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \dfrac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

解 采用极坐标. 由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr$$

$$= 2\pi\left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{r\to 1} = 2\pi.$$

4172. $\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \dfrac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$.

解 采用极坐标. 由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-1}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{p-1}, \text{当 } p>1 \text{ 时;} \\ -\infty, \text{当 } p\leqslant 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

4173. $\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\dfrac{dxdy}{x^4+y^2}$.

解 由于被积函数非负,故

$$I=\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{dy}{x^4+y^2}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{dy}{x^4+y^2}$$

$$=2\int_0^{+\infty}dx\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{dxdy}{x^4+y^2}.$$

由于

$$\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{dy}{x^4+y^2}=\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x^2}\Bigg|_{y=x^2+1}^{y=+\infty}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right],$$

故

$$I=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]dx$$

$$=-\frac{2}{x}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$+2\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x^3}}{1+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}},$$

其中$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x}$

$$
= \lim_{x \to +0} \frac{\dfrac{-\dfrac{2}{x^3}}{1+\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^2}}{1}
$$

$$
= \lim_{x \to +0} \left(- \frac{x}{x^4 + x^2 + \dfrac{1}{2}} \right) = 0.
$$

下面计算积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \dfrac{1}{2}}$.为简单计,记

$$
a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{则}
$$

$$
\frac{1}{x^4 + x^2 - \dfrac{1}{2}}
$$

$$
= \frac{1}{\left(x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - (\sqrt{2} - 1)x^2}
$$

$$
= \frac{1}{(x^2 + b)^2 - (ax)^2}
$$

$$
= \frac{1}{(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b)}
$$

$$
= \frac{1}{2ab}\left(\frac{x + a}{x^2 + ax + b} - \frac{x - a}{x^2 - ax + b}\right)
$$

$$
= \frac{1}{4ab}\left(\frac{2x + a}{x^2 + ax + b} + \frac{a}{x^2 + ax + b} - \frac{2x - a}{x^2 - ax + b} + \frac{a}{x^2 - ax + b}\right).
$$

于是,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4ab}\int_0^{+\infty} \left(\frac{2x + a}{x^2 + ax + b} - \frac{2x - a}{x^2 - ax + b}\right)dx$$

$$+ \frac{1}{4b}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 + ax + b} + \frac{1}{x^2 - ax + b}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4ab}\left(\ln \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - ax + b}\right) \Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$+ \frac{1}{4b}\left(\frac{2}{\sqrt{4b - a^2}}\operatorname{arctg} \frac{2x + a}{\sqrt{4b - a^2}} \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{4b - a^2}}\operatorname{arctg} \frac{2x - a}{\sqrt{4b - a^2}}\right) \Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$= 0 + \frac{1}{4b} \frac{2\pi}{\sqrt{4b - a^2}} = \frac{\pi}{2b\sqrt{4b - a^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2} - 1)}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2} + 1}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2} + 1}\sqrt{\sqrt{2} - 1}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{\sqrt{2} - 1}\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}}{2},$$

故

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} = \pi\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}.$$

4174. $\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} e^{-(x+y)}dxdy$.

解 由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}e^{-(x+y)}dy$$

$$= \int_0^{+\infty}e^{-x}dx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy = \int_0^{+\infty}e^{-2x}dx = \frac{1}{2}.$$

变换为极坐标而计算积分：

4175. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

解 由于被积函数非负，故采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}dr$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=+\infty} = \pi.$$

4176. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy$.

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)| \leqslant e^{-(x^2+y^2)},$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ 收敛(参看 4175 题)，

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy$ 收敛. 从而，采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\cos r^2dr = \pi\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos tdt$$

$$= \pi\left(\frac{\sin t - \cos t}{(-1)^2+1^2}e^{-t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

4177. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$.

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)|\leqslant e^{-(x^2+y^2)},$$

而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ 收敛(参看 4175 题),

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$ 收敛.

从而,采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\sin r^2dr=\pi\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin tdt$$
$$=\pi\left(\frac{-\sin t-\cos t}{(-1)^2+1^2}e^{-t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

计算积分:

4178. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}dxdy$,

其中 $a<0, ac-b^2>0$.

解 我们有(令 $\delta=ac-b^2>0, t=x+\frac{b}{a}y$)

$$\varphi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$$
$$=a\left(x^2+\frac{2b}{a}xy+\frac{b^2}{a^2}y^2\right)$$
$$+\frac{ac-b^2}{a}+y^2+2dx+2ey+f$$
$$=a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{\delta}{a}y^2+2dx+2ey+f$$
$$=at^2+\frac{\delta}{a}y^2+2d\left(t-\frac{b}{a}y\right)+2ey+f$$
$$=a\left(t^2+\frac{2d}{a}t+\frac{d^2}{a^2}\right)$$

$$
-\frac{d^2}{a}+\frac{\delta}{a}\Big(y^2+\frac{2}{\delta}(ae-bd)y
$$

$$
+\frac{(ae-bd)^2}{\delta^2}\Big)-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}+f
$$

$$
=a\left(t+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{\delta}{a}\left(y+\frac{ae-bd}{\delta}\right)^2+\beta,
$$

其中

$$
\beta=f-\frac{d^2}{a}-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}
$$

$$
=\frac{1}{a\delta}[af(ac-b^2)-d^2(ac-b^2)
$$

$$
-(ae-bd)^2]
$$

$$
=\frac{1}{\delta}(acf-b^2f-cd^2-ae^2+2bde)=\frac{\Delta}{\delta},
$$

这里

$$
\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.
$$

今作变量代换

$$
\begin{cases} u=\sqrt{-a}x+\dfrac{b\sqrt{-a}}{a}y+\dfrac{d\sqrt{-a}}{a} \\ v=\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}y+\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\cdot\dfrac{ae-bd}{\delta}, \end{cases} \tag{1}
$$

则 $\varphi(x,y)=-u^2-v^2+\beta$. 又

$$
\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}
$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}\sqrt{-a} & \frac{b}{a}\sqrt{-a}\\ 0 & \sqrt{-\frac{\delta}{a}}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\sqrt{\delta}}>0.$$

故线性变换(1)是非退化的，它将(x,y)平面的点与(u,v)平面的点一一对应. 于是，利用4175题的结果，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varphi(x,y)}dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2-v^2+\beta}\frac{1}{\sqrt{\delta}}dudv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u^2+v^2)}dudv\quad=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}.$$

4179. $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy.$

解 作广义极坐标变换

$$x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta,$$

由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{+\infty}abre^{-r^2}dr$$

$$=2\pi ab\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_{r=1}^{r\to+\infty}=\frac{\pi}{e}ab.$$

4180. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy\,(0<|\varepsilon|<1).$

解 作广义极坐标变换

$$x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta,$$

则有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}a^2b^2r^3\sin 2\theta e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}drd\theta. \qquad (1)$$

由于 $\left|r^3\sin 2\theta e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\right|\leqslant r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}$,

而积分

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}dr$$

$$=2\pi\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}dr<+\infty,$$

故(1)式中的二重广义积分收敛. 于是,

$$I=\frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dr. \qquad (2)$$

但是

$$\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt$$

$$=-\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\left[te^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}\right.$$

$$\left.-\int_0^{+\infty}e^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\int_0^{+\infty}e^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt$$

$$=\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2},$$

故

$$I=\frac{1}{4}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2}d\theta$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du\right)$$

$$= \frac{1}{2}a^2b^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u du}{(1+\varepsilon\sin u)^2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}\right). \tag{3}$$

但是(作代换 $u = \frac{\pi}{2} - v$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u du}{(1+\varepsilon\sin u)^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\varepsilon\sin u} - \frac{1}{(1+\varepsilon\sin u)^2}\right)du$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\varepsilon\cos v} - \frac{1}{(1+\varepsilon\cos v)^2}\right)dv,$$

同理,有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\varepsilon\cos v} - \frac{1}{(1-\varepsilon\cos v)^2}\right)dv.$$

根据 2028 题(a) 和 2063 题的结果,可知(当 $0 < |\varepsilon| < 1$

时）

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C, \qquad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(1-\varepsilon\cos x)^2}$$

$$= -\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}$$

$$+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C. \qquad (5)$$

（注意，2028 题(a)和 2063 题中假定 $0<\varepsilon<1$，但从其推导过程可以看出公式(4)、(5) 当 $-1<\varepsilon<0$ 时也成立）.

于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\,du}{(1+\varepsilon\sin u)^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\,du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right].$$

从而，由(3)式得

$$I=\frac{1}{\varepsilon}a^2b^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\cdot\left\{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right\}.$$

但对任何的 $x>0$，有

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

故最后得

$$I=\frac{1}{\varepsilon}a^2b^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

研究不连续函数的二重广义积分的收敛性($0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$)：

4181. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$，式中域 Ω 是由条件 $|y|\leqslant x^2$；$x^2+y^2\leqslant 1$ 所确定.

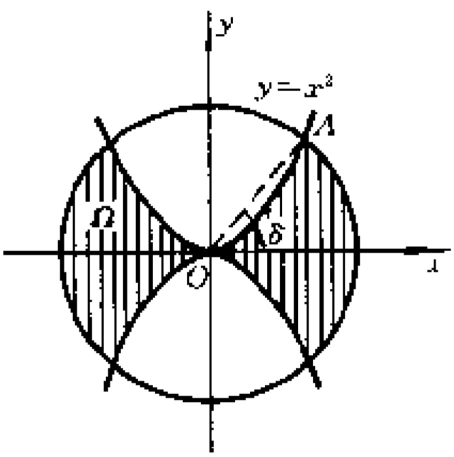

图 8.61

解 显然，Ω 为图 8.61 中的阴影部分. 由于对称性以及

被积函数的非负性.采用极坐标就有

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$$

$$=4\int_0^{\delta}d\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{1}\frac{dr}{r}=4\int_0^{\delta}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta.$$

其中 δ 表图 8.61 中射线 OA 与 Ox 轴之间的夹角,抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程为 $r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$. 由于

$$\lim_{\theta\to+0}\theta^{\frac{1}{2}}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}=0,$$

故积分 $\int_0^{\delta}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta$ 收敛,从而原积分 $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$ 收敛.

4182. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}dxdy.$

解 由于

$$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)^2>0$$

$$(当(x,y)\neq(0,0)时),$$

故

$$\frac{m}{(x^2+xy+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+xy+y^2)^p}$$

$$\leqslant\frac{M}{(x^2+xy+y^2)^p}(当(x,y)\neq(0,0时),$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛,即知积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+xy+y^2}dxdy \text{ 与积分}$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+xy+y^2)^p}$$，同时收敛或同时发散.

由于$\dfrac{1}{(x^2+xy+y^2)^p} > 0$（当$(x,y) \neq (0,0)$时），采用极坐标即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+xy+y^2)^p}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p} \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}},$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}$ 为常义积分，其值为有限数，

而

$$\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-p)}, \text{当 } p < 1 \text{ 时;} \\ +\infty, \text{当 } p \geqslant 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

由此可知：原积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}dxdy$

当 $p<1$ 时收敛，当 $p \geqslant 1$ 时发散.

4183. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q} \quad (p>0, q>0).$

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$$

$$= 4 \iint\limits_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \frac{dxdy}{x^p + y^q}$$

$$= 4 \iint\limits_{\Omega_1} \frac{dxdy}{x^p + y^q} + 4 \iint\limits_{\Omega_2} \frac{dxdy}{x^p + y^q}, \tag{1}$$

其中 $\Omega_1 = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, x^p + y^q \geq 2^{-p-q}\}$, $\Omega_2 = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}\}$. 令 $\Omega_3 = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}\}$. 易知,当 $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}$ 时,必有 $x + y \leq 1$(因为 $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq \frac{1}{2^{p+q}}$,故 $x^p \leq \frac{1}{2^{p+q}} \leq \frac{1}{2^p}$, $y^q = \frac{1}{2^{p+q}} \leq \frac{1}{2^q}$,从而 $x \leq \frac{1}{2}$, $y \leq \frac{1}{2}$,由此知 $x + y \leq 1$),故 $\Omega_3 = \Omega_2$. 由于函数 $\frac{1}{x^p + y^q}$ 在有界闭区域 Ω_1 上连续,故(1)式右端第一个积分为常义积分. 因此,广义积分 $\iint\limits_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q}$ 的敛散性取决于广义积分 $\iint\limits_{\Omega_3} \frac{dxdy}{x^p + y^q}$ 的敛散性. 在此积分中作变量代换

$$x = r^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \theta, y = r^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \theta,$$

则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \frac{4}{pq} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta.$$

于是,注意到被积函数是非负的,得

$$\iint\limits_{\Omega_3} \frac{dxdy}{x^p + y^q} = \frac{4}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta d\theta$$

$$\cdot \int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}dr.$$

由 3856 题的结果知右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta d\theta \quad (p>0,q>0)$$

恒收敛，且其值为$\frac{1}{2}B(\frac{1}{q},\frac{1}{p})$；而第二个积分

$$\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{q}+\frac{2}{p}-3}dr$$

当$\frac{2}{p}-\frac{2}{q}-3>-1$(即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$)时收敛，当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\leqslant-1$(即$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}\leqslant 1$)时发散.

综上所述，可知原积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$ 当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$时收敛，当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant 1$时发散.

4184. $\int_0^a\int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}dxdy.$

解 由于

$$\frac{m}{|x-y|^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{|x-y|^p}\leqslant\frac{M}{|x-y|^p},$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛，可知积分 $\int_0^a\int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}dxdy$ 与积分 $\int_0^a\int_0^a \frac{dxdy}{|x-y|^p}$ 同时收敛或同时发散. 由对称性及被积函数的非负性，可知

$$\int_0^a\int_0^a \frac{dxdy}{|x-y|^p}=2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}. \qquad (1)$$

当 $p<1$ 时，

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=\int_0^a dx\int_0^x\frac{dy}{(x-y)^p}$$

$$=\int_0^a\frac{x^{1-p}}{1-p}dx=\frac{a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

从而，由(1)式知

$$\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{|x-y|^p}=\frac{2a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

因此，当 $p<1$ 时积分 $\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{|x-y|^p}$ 收敛.

现设 $P\geqslant 1$. 首先，我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}. \tag{2}$$

若 $p=1$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{x-y}$$

$$=\int_\varepsilon^a(\ln x-\ln\varepsilon)dx=a\ln a-a+\varepsilon-a\ln\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(a\ln a-a+\varepsilon-a\ln\varepsilon)=+\infty.$$

由此可知，此时 $\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{|x-y|^p}$ 发散；若 $p=2$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{(x-y)^2}$$

$$=\int_\varepsilon^a\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{a}{\varepsilon}-1-\ln a+\ln\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{a+\varepsilon\ln\varepsilon}{\varepsilon}-1-\ln a\right)=+\infty.$$

由此可知，此时积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{|x-y|^p}$发散；最后，若$P>1,p\neq 2$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{(x-y)^p}$$

$$=\frac{1}{p-1}\int_\varepsilon^a(\varepsilon^{1-p}-x^{1-p})dx$$

$$=\frac{1}{(p-1)\varepsilon^{p-1}}\left(a-\frac{p-1}{p-2}\varepsilon\right)$$

$$+\frac{1}{(p-1)(p-2)a^{p-2}}.$$

从而，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dxdy}{(x-y)^p}=+\infty.$$

由此可知，此时积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{|x-y|^p}$发散.

综上所述，可知积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dxdy}{|x-y|^p}$当$P<1$时收敛，$p\geqslant 1$时发散.

4185. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy.$

解 由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(1-x^2-y^2)^p}$$
$$\leqslant\frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy$ 与积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^p}$ 同时收敛同时发散. 采用极坐标，由于被积函数 $\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}$ 是正的，故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^p}$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{(1-r^2)^p}dr$$
$$=2\pi\int_0^1\frac{rdr}{(1-r)^p(1+r)^p}.$$

由于

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^p\cdot\frac{r}{(1-r)^p(1+r)^p}=2^{-p},$$

故积分 $\int_0^1\frac{rdr}{(1-r)^p(1+r)^p}$ 当 $p<1$ 时收敛，$p>1$ 时发散；当 $p=1$ 时，有

$$\int_0^1\frac{rdr}{1-r^2}=-\frac{1}{2}\ln(1-r^2)\Big|_0^1=+\infty,$$

故积分也发散. 由此可知，积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy$$ 当 $p<1$ 时收敛；当 $p\geqslant 1$ 时发散.

4186. 证明，如果：1) 函数 $\varphi(x,y)$ 在有界域 $a\leqslant x\leqslant A, b\leqslant y\leqslant B$ 内是连续的；2) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant A$ 上连续；3) $p<1$，则积分

$$\int_a^A dx\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy$$

收敛.

证 首先注意，由于 $p<1$，故积分 $\int_b^B\frac{dy}{|f(x)-y|^p}$ 对每个固定的 $x\in[a,A]$ 恒收敛（若 $f(x)\in[b,B]$，此为瑕积分，点 $f(x)$ 是瑕点，由于 $p<1$，它收敛；若 $f(x)\bar{\in}[b,B]$，则为常义积分，当然收敛）. 再根据 $\varphi(x,y)$ 的有界性，即知：对每个固定的 $x\in[a,A]$，积分 $\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy$ 都收敛. 令

$$F(x)=\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy\,(a\leqslant x\leqslant A).$$

下面我们证明 $F(x)$ 是 $a\leqslant x\leqslant A$ 上的连续函数. 若已获证，则积分

$$\int_0^A dx\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy=\int_0^A F(x)dx$$

显然是收敛的（右端为常义积分），于是本题即获证. 令 $c=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant A}|f(x)|$. 今将函数 $\varphi(x,y)$ 连续地延拓到有界闭矩形 $R(a\leqslant x\leqslant A, b-2c\leqslant y\leqslant B+2c)$ 上（只要规定

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\varphi(x,B),\text{当 } a\leqslant x\leqslant A, \\ \qquad\qquad B<y\leqslant B+2c \text{ 时}, \\ \varphi(x,b),\text{当 } a\leqslant x\leqslant A, \\ \qquad\qquad b-2c\leqslant y<b \text{ 时}\end{cases}$$

即可). 延拓后的函数仍记为 $\varphi(x,y)$. 由于 $\varphi(x,y)$ 及 $|f(x)-y|^{1-p}$ 都在 R 上连续,故有界且一致连续:存在常数 M,使对一切 $(x,y)\in R$,有

$$|\varphi(x,y)|\leqslant M,\ |f(x)-y|^{1-p}\leqslant M. \tag{1}$$

任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$(取 $\delta_1<(\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{1-p}}$),使当 $|x_1-x_2|<\delta_1$, $|y_1-y_2|<\delta_1$($(x_1,y_1)\in R,(x_2,y_2)\in R$)时,恒有

$$|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_2)|<\varepsilon, \tag{2}$$

$$\left||f(x_1)-y_1|^{1-p}-|f(x_2)-y_2|^{1-p}\right|<\varepsilon. \tag{3}$$

又由 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上的一致连续性可知,存在 $\delta_2>0$,使当 $|x_1-x_2|<\delta_2$($x_1,x_2\in[a,A]$)时,恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\delta_1. \tag{4}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 于是,由(2)式可知:当 $|x_1-x_2|<\delta$($x_1,x_2\in[a,A]$)时,对一切 $b-c\leqslant y\leqslant B+c$,恒有

$$|\varphi(x_1,y+f(x_1))-\varphi(x_2,y+f(x_2))|<\varepsilon. \tag{5}$$

现设 $|x_1-x_2|<\delta$,($x_1,x_2\in[a,A]$). 不失一般性,设 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,我们有

$$F(x_1)-F(x_2)$$

$$=\int_b^B\frac{\varphi(x_1,y)}{|f(x_1)-y|^p}dy-\int_b^B\frac{\varphi(x_2,y)}{|f(x_2)-y|^p}dy$$

$$=\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_1)}\frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))}{|u|^p}du$$

$$-\int_{b-f(x_2)}^{B-f(x_2)}\frac{\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}du$$

$$=\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)}\frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))-\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}du$$

$$-\int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)}\frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))}{|u|^p}du$$

$$+\int_{b-f(x_1)}^{b-f(x_2)}\frac{\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}du$$

$$=I_1-I_2+I_3, \tag{6}$$

其中 I_1,I_2,I_3 分别表上式中的三个积分。易知($p<1$)

$$\int_\alpha^\beta\frac{du}{|u|^p}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}[\beta^{1-p}-\alpha^{1-p}], & \text{当 } 0\leqslant\alpha\leqslant\beta \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{1}{1-p}[(-\alpha)^{1-p}-(-\beta)^{1-p}], & \text{当 } \alpha\leqslant\beta\leqslant 0 \text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{1}{1-p}[\beta^{1-p}+(-\alpha)^{1-p}], & \text{当 } \alpha<0<\beta \text{ 时.}\end{cases}$$

从而,在任何情形下均有

$$\int_\alpha^\beta\frac{du}{|u|^p}\leqslant\frac{1}{1-p}(|\beta|^{1-p}+|\alpha|^{1-p}); \tag{7}$$

而当 α,β 同号时,有

$$\int_\alpha^\beta\frac{du}{|u|^p}=\frac{1}{1-p}\left|\,|\beta|^{1-p}-|\alpha|^{1-p}\right|. \tag{8}$$

于是,由(5)式、(1)$'$式及(7)式,得

$$|I_1|<\varepsilon\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)}\frac{du}{|u|^p}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{1-p}(|B-f(x_2)|^{1-p}+|b-f(x_1)|^{1-p})$$

$$\leqslant \frac{2M\varepsilon}{1-p}. \tag{9}$$

下面估计 I_2：若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 同号，则由(1)式、(8)式及(3)式，有

$$|I_2| \leqslant M\int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p}$$

$$= \frac{M}{1-p}\left|\,|B-f(x_2)|^{1-p} - |B-f(x_1)|^{1-p}\right|$$

$$< \frac{M\varepsilon}{1-p};$$

若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 异号，即 $B-f(x_1)<0<B-f(x_2)$. 由于

$[B-f(x_2)]-[B-f(x_1)]=f(x_1)-f(x_2)<\delta_1$，故有 $|B-f(x_1)|<\delta_1$，$|B-f(x_2)|<\delta_1$.

于是，由(7)式并注意到 $\delta_1<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$，即得

$$|I_2| \leqslant M\int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p}$$

$$\leqslant \frac{M}{1-p}(|B-f(x_2)|^{1-p} + |B-f(x_1)|^{1-p})$$

$$< \frac{M}{1-p}(\delta_1^{1-p}+\delta_1^{1-p}) < \frac{M\varepsilon}{1-p}.$$

所以，在任何情形下均有

$$|I_2| < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \tag{10}$$

同理，可得(在任何情形下)

$$|I_3| < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \tag{11}$$

于是，由(6)式、(9)式、(10)式及(11)式，即得

$$|F(x_1)-F(x_2)| < |I_1| + |I_2| + |I_3|$$

$$< \frac{4M\varepsilon}{1-p}.$$

由此可知，$F(x)$ 在 $a \leqslant x \leqslant A$ 上(一致)连续，证毕.

计算下列积分：

4187. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$

解 采用极坐标，由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \ln \frac{1}{r} dr = -2\pi \int_0^1 r \ln r dr$$

$$= -2\pi \left(\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2} dr \right) = \frac{\pi}{2}.$$

4188. $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a > 0).$

解 $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$

$$= \int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx.$$

作变量代换 $x = au$，则

$$\int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx = 2a \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= 2aB\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2a \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= 2a \cdot \frac{1}{2} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 = \pi a.$$

4189. $\iint\limits_{\Omega} \ln\sin(x-y) dxdy$，这里域 Ω 是由直线 $y=0$，$y=x$，

$x=\pi$ 所界.

解 作变量代换 $x=u+v, y=u-v$, 则 Oxy 平面上的域 Ω 变为 uv 平面上的域 Ω'. 显然 Ω' 由直线 $u=v$, $v=0, u+v=\pi$ 所界. 又有 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-2$.

于是, 再注意到被积函数非正, 即有

$$\iint_{\Omega} \ln\sin(x-y)dxdy$$

$$=2\iint_{\Omega'}\ln\sin 2v du dv = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dv\int_v^{\pi-v}\ln\sin 2v du$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin 2v dv = 2\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)dv$$

$$+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v dv+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\cos v dv$$

$$=\pi^2\ln 2-\frac{\pi^2}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v dv$$

$$+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\ln\sin t dt$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\ln 2+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin v dv$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\ln 2+2\pi\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{*)}=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

*) 利用 2353 题(a) 的结果.

4190. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant x}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 由关于 Ox 轴的对称性与被积函数的非负性, 采用极坐标, 有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant x\\ y\geqslant 0}} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = 2.$$

研究下列三重积分的收敛性：

4191. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz$，这里 $0 < m \leqslant |\varphi(x,y,z)| \leqslant M$.

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leqslant \frac{|\varphi(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leqslant \frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，可知积分

$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz$ 与积分

$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 同时收敛或同时发散.

由于被积函数 $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 是正的，采用球坐标

$x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi$，得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}$$

$$= 4\pi\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

显然，$\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p>\frac{3}{2}$ 时收敛，$p\leqslant\frac{3}{2}$ 时发散；

由此可知，$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}dxdydz$

当 $p>\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\leqslant\frac{3}{2}$ 时发散.

4192. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}dxdydz$，这里 $0<m\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$.

解 和 4191 题完全类似（请参看 4191 题的解题过程），易得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{\pi}}\cos\psi d\psi\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-2}}$$

$$=4\pi\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

显然，$\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\geqslant\frac{3}{2}$ 时发散；

故 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}dxdydz$ 当 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\geqslant\frac{3}{2}$ 时发散.

4193. $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\geqslant 1}\frac{dxdydz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}(p>0,q>0,r>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dxdydz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$$

$$= 8 \iiint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\\ x+y+z>1}} \frac{dxdydz}{x^p + y^q + z^r}$$

$$= 8\iiint\limits_{\Omega_1} \frac{dxdydz}{x^p + y^q + z^r} + 8\iiint\limits_{\Omega_2} \frac{dxdydz}{x^p + y^q + z^r}.$$

其中$\Omega_1 = \{(x,y,z)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r\leqslant 3\}$，$\Omega_2 = \{(x,y,z)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r>3\}$.令$\Omega_3 = \{(x,y,z)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x^p+y^q+z^r>3\}$.由于当$x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x^p+y^q+z^r>3$时必有$x+y+z>1$(否则，$x+y+z\leqslant 1$，就有$x\leqslant 1,y\leqslant 1,z\leqslant 1$，从而$x^p\leqslant 1,y^q\leqslant 1,z^r\leqslant 1$，于是$x^p+y^q+z^r\leqslant 3$)，故$\Omega_2=\Omega_3$.显然，

$\iiint\limits_{\Omega_1} \frac{dxdydz}{x^p + y^q + z^r}$为常义积分，故积分

$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dxdydz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$的敛散性取决于

$\iiint\limits_{\Omega_3} \frac{dxdydz}{x^p + y^q + z^r}$的敛散性.对此积分，作变量代换

$$x = R^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi\cos^{\frac{2}{p}}\psi,$$
$$y = R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi\cos^{\frac{2}{q}}\psi,$$
$$z = R^{\frac{2}{r}}\sin^{\frac{2}{r}}\psi,$$

则易知

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}$$

$$= \frac{8}{pqr} R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1} \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi \sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi$$

$$\cdot \sin^{\frac{2}{r}-1}\psi \cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi.$$

于是，由被积函数的非负性，并利用 3856 题的结果，得

$$\iiint\limits_{\Omega_3} \frac{dxdydz}{x^p + y^q + z^r}$$

$$= \frac{8}{pqr}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{r}-1}\psi \cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi d\psi$$

$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi d\varphi$$

$$\cdot \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3} dR$$

$$= \frac{8}{pqr} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3} dR$$

$$= \frac{2}{pqr} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right)$$

$$\cdot \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3} dR.$$

由于积分$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3} dR$当$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 < -1$（即$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$）时收敛，当$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 \geqslant -1$时发散，故积分$\iiint\limits_{\Omega_3} \frac{dxdydz}{x^p + y^q + z^r}$（从而积分 $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\geq 1} \frac{dxdydz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$）当$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

$+\frac{1}{r}<1$ 时收敛，当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geqslant 1$ 时发散.

4194. $\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{f(x,y,z)dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$，其中 $0<m\leqslant|f(x,y,z)|\leqslant M$，而 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是在闭区间 $[0,a]$ 上的连续函数.

解 由于

$$\frac{m}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$\leqslant \frac{|f(x,y,z)|}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$\leqslant \frac{M}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{f(x,y,z)dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$ 与积分

$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$ 同时收敛或同时发散. 由被积函数 $\frac{1}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$ 的非负性，我们有

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$=\int_0^a F(x)dx,$$

其中

$$F(x)=\int_0^a\int_0^a \frac{dydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$(0\leqslant x\leqslant a).$$

作变量代换

$$u = y - \varphi(x),\ v = z - \psi(x) \quad (x \text{ 固定}),$$
则

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(y,z)}} = 1.$$

从而,有

$$F(x) = \iint\limits_{\substack{-\varphi(x)\leqslant u\leqslant a-\varphi(x)\\ -\psi(x)\leqslant v\leqslant a-\psi(x)}} \frac{dudv}{(u^2+v^2)^p}. \qquad (1)$$

先设 $p<1$. 令 $c = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}(|\varphi(x)|+|\psi(x)|)$,则由(1)式知

$$0 < F(x) \leqslant \iint\limits_{\substack{-c\leqslant u\leqslant a+c\\ -c\leqslant v\leqslant a+c}} \frac{dudv}{(u^2+v^2)^p}$$

$$< \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2(a+c)^2} \frac{dudv}{(u^2+v^2)^p}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}(a+c)} \frac{dr}{r^{2p-1}}$$

$$= \frac{\pi}{1-p}[\sqrt{2}(a+c)]^{2-2p},$$

即 $F(x)$ 有界(实际上,仿 4186 题的证明过程还可证明 $F(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续),从而$\int_0^a F(x)dx$ 是常义积分,显然收敛. 由此可知,此时积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p} \qquad (2)$$

收敛.

次设 $p\geqslant 1$,这时积分(2)可能收敛也可能发散,分两种情况讨论:

i) 若不存在这样的 $x\in[0,a]$ 使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant a$, $0\leqslant$

$\psi(x) \leqslant a$ 同时成立(例如,$\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 的值完全位于 $[0,a]$ 之外;这时,对一切 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a$,均有:连续函数 $\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p > 0$. 从而,积分(2)收敛(这时是常义积分).

ii) 若存在这样的点 $x \in [0,a]$ 使 $0 < \varphi(x) < a, 0 < \psi(x) < a$ 同时成立;由 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的连续性,必存在正数 ε 及闭区间 $I_0 \subset [0,a]$,使当 $x \in I_0$ 时,恒有 $\varepsilon \leqslant \varphi(x) \leqslant a-\varepsilon, \varepsilon \leqslant \psi(x) \leqslant a-\varepsilon$. 从而由(1)式知:当 $x \in I_0$ 时,有

$$
\begin{aligned}
F(x) &\geqslant \iint\limits_{\substack{-\varepsilon\leqslant u\leqslant\varepsilon\\ -\varepsilon\leqslant v\leqslant\varepsilon}} \frac{dudv}{(u^2+v^2)^p} \\
&\geqslant \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\varepsilon^2} \frac{dudv}{(u^2+v^2)^p} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r^{2p-1}} \\
&= 2\pi \int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r^{2p-1}} = +\infty \quad (\text{注意 } p \geqslant 1),
\end{aligned}
$$

即当 $x \in I_0$ 时恒有 $F(x) = +\infty$,由此可知,积分 $\int_0^a F(x)dx$ 发散. 于是,积分(2)发散.

综上所述,可知:积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{f(x,y,z)dxdydz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

当 $p < 1$ 时收敛;当 $p \geqslant 1$ 时,若不存在 $x \in [0,a]$ 使 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant a, 0 \leqslant \psi(x) \leqslant a$,则收敛;若存在 $x \in [0,a]$,使 $0 < \varphi(x) < a, 0 < \psi(x) < a$,则发散.

4195. $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ |y|\leqslant 1\\ |z|\leqslant 1}} \frac{dxdydz}{|x+y-z|^p}$.

解 我们有(注意被积函数的非负性)

$$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ |y|\leqslant 1\\ |z|\leqslant 1}} \frac{dxdydz}{|x+y-z|^p}$$

$$= 2 \iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1,|z|\leqslant 1\\ x+y-z\geqslant 0}} \frac{dxdydz}{(x+y-z)^p}$$

$$= 2 \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\\ -1\leqslant x+y\leqslant 1}} dxdy\int_{-1}^{x+y} \frac{dz}{(x+y-z)^p}$$

$$+ 2 \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ x+y\geqslant 1}} dxdy\int_{-1}^{1} \frac{dz}{(x+y-z)^p}$$

$$= 2I_1 + 2I_2,$$

其中 I_1 表第一个积分，I_2 表第二个积分.

若 $p<1$，则

$$\int_{-1}^{x+y} \frac{dz}{(x+y-z)^p} = \frac{(x+y+1)^{1-p}}{1-p},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dz}{(x+y-z)^p}$$

$$= \frac{(x+y+1)^{1-p}-(x+y-1)^{1-p}}{p-1}(x+y\geqslant 1),$$

故

$$I_1 = \frac{1}{1-p} \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\\ -1\leqslant x+y\leqslant 1}} (x+y+1)^{1-p}dxdy,$$

$$I_2=\frac{1}{1-p}\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ x+y\ge 1}}[(x+y+1)^{1-p}$$

$$-(x+y-1)^{1-p}]dxdy.$$

显然，I_1 与 I_2 均为常义（二重）积分，当然收敛. 因此，积分 $\iiint\limits_{\substack{|x|\le 1\\|y|\le 1\\|z|\le 1}}\frac{dxdydz}{|x+y-z|^p}$ 收敛.

若 $p\geqslant 1$，则当 $x+y>-1$ 时，

$$\int_{-1}^{x+y}\frac{dz}{|x+y-z|^p}=+\infty,$$

故 $I_1=+\infty$，又显然有 $I_2>0$，故此时积分

$$\iiint\limits_{\substack{|x|\le 1\\|y|\le 1\\|z|\le 1}}\frac{dxdydz}{|x+y-z)^p}$$

发散.

计算积分：

4196. $\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dxdydz}{x^py^qz^r}$.

解 由于被积函数非负，故

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dxdydz}{x^py^qz^r}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{x^p}\int_0^1\frac{dy}{y^q}\int_0^1\frac{dz}{z^r}$$

$$=\frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)}\text{（若 }p<1,q<1,r<1\text{）}.$$

注意，若 $p\geqslant 1$ 或 $q\geqslant 1$ 或 $r\geqslant 1$，则

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dxdydz}{x^py^qz^r}=+\infty.$$

4197. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

解 采用球坐标. 由于被积函数的非负性,有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^4}$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

4198. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$.

解 采用球坐标. 由于被积函数的非负性,有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr$$

$$= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr.$$

作代换 $t = r^2$,则当 $p < 1$ 时有

$$\int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-p} dt$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right).$$

从而,当 $p < 1$ 时有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

$$= 2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right).$$

注意，若 $p\geqslant 1$，则$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}dt=+\infty$，故

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}=+\infty.$$

4199. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz.$

解 采用球坐标. 由被积函数的非负性，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\int_0^{+\infty}r^2e^{-r^2}dr$$

$$=4\pi\int_0^{+\infty}r^2e^{-r^2}dr.$$

作代换 $r^2=t$，则

$$\int_0^{+\infty}r^2e^{-r^2}dr=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

于是，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz=\pi^{\frac{3}{2}}.$$

4200. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3,$$

其中 $P(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$ 为正定形.

解 用 A 表矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

由于二次型 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ 是正定的，故由高等代数中关于二次型的理论知：存在正交矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

使

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3>0$；也即在线性（正交）变换

$$\begin{cases} x_1=b_{11}x'_1+b_{12}x'_2+b_{13}x'_3 \\ x_2=b_{21}x'_1+b_{22}x'_2+b_{23}x'_3 \\ x_3=b_{31}x'_1+b_{32}x'_2+b_{33}x'_3 \end{cases} \tag{3}$$

之下，二次型 $P(x_1,x_2,x_3)$ 化为平方和：

$$\begin{aligned} P(x_1,x_2,x_3) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j \\ &= \lambda_1x_1'^2+\lambda_2x_2'^2+\lambda_3x_3'^2. \end{aligned} \tag{4}$$

注意，由于 B 是正交矩阵，故 $B^{-1}=B'$（B' 表 B 的转置矩阵），从而 $|B|=|b_{ij}|=\pm 1$. 显然，

$$\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(x'_1,x'_2,x'_3)}=|b_{ij}|=\pm 1.$$

由(4)式，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1x'^2_1-\lambda_2x'^2_2-\lambda_3x'^2_3}dx'_1dx'_2dx'_3. \tag{5}$$

再作变量代换 $x'_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}u_1, x'_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}u_2, x'_3=$

$\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}u_3$，则$\frac{D(x'_1,x'_2,x'_3)}{D(u_1,u_2,u_3)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}$.

于是(注意 4199 题的结果)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1x'^2_1-\lambda_2x'^2_2-\lambda_3x'^2_3}dx'_1dx'_2dx'_3$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u_1^2+u_2^2+u_3^2)}du_1du_2du_3$$

$$=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}. \tag{6}$$

但由 (2) 式知(记 $\Delta=|a_{ij}|=|A|$，注意，由于 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ 是正定的，故 $\Delta>0$)

$$\Delta=|A|=|B^{-1}|\cdot|A|\cdot|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{7}$$

于是，根据(5)，(6)，(7) 诸式，最后得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3$$

$$=\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}.$$

§10. 多重积分

1° 多重积分的直接计算法　若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在由下列不等式所确定的有界域 Ω 内是连续的：

$$\begin{cases} x_1' \leqslant x_1 \leqslant x_1'', \\ x_2'(x_1) \leqslant x_2 \leqslant x_2''(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant x_n''(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}), \end{cases}$$

其中 x_1' 和 x_1'' 为常数及 $x_2'(x_1), x_2''(x_1), \cdots, x_n'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}), x_n''(x_1, x_2,\cdots,x_{n-1})$ 为连续函数，则对应的多重积分可按下列公式来计算：

$$\iint_\Omega \cdots \int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$= \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \cdots$$

$$\int_{x_n'(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{x_n''(x_1,\cdots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_n.$$

2° 重积分中的变量代换　若 1) 函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在有界可测的域 Ω 内是均匀连续的；2) 连续可微分的函数

$$x_i = \varphi_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)(i=1,2,\cdots,n),$$

把 $Ox_1,x_2,\cdots,x_n$ 空间的域 Ω 双方单值地映射成 $O'\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 空间内的有界域 Ω'；3) 在域 Ω' 内雅可比式

$$I = \frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)} \neq 0,$$

则下面的公式正确

$$\int_\Omega \cdots \int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$= \iint_{\Omega'} \cdots \int f(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)|I|d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n.$$

特别是，根据公式

$$x_1 = r\cos\varphi_1,$$

$$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$

$$x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$

变换成极坐标时 $(r,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$，有

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})}$$

$$= r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}.$$

4201. 设 $K(x,y)$ 为域 $R[a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b]$ 内的连续函数及

$$K_n(x,y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots \cdot K(t_n,y)dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

证明:

$$K_{n+m+1}(x,y) = \int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)dt.$$

证

$$K_{n+m+1}(x,y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)$$

$$\cdots K(t_n,t)K(t,z_1)K(z_1,z_2)\cdots K(z_m,y)dt_1dt_2$$

$$\cdots dt_n dt dz_1 dz_2 \cdots dz_m$$

$$= \int_a^b \Big\{ \Big[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)$$

$$\cdots K(t_n,t)dt_1dt_2\cdots dt_n \Big]$$

$$\cdot \Big[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(t,z_1)K(z_1,z_2)$$

$$\cdots K(z_m,y)dz_1dz_2\cdots dz_m \Big] \Big\} dt$$

$$= \int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)dt.$$

4202. 设 $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为域 $0 \leqslant x_i \leqslant x (i = 1, 2, \cdots, n)$ 内的连续函数,证明等式

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n$$

$$= \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1 \quad (n \geqslant 2).$$

证 考虑下面三个有界闭域：

$$\Omega = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid 0 \leqslant x_i \leqslant x,\ i = 1,2,\cdots,n\},$$

$$\Omega_1 = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant x,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1,\cdots,0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1}\},$$

$$\Omega_2 = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid 0 \leqslant x_n \leqslant x,\ x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x,\cdots,x_2 \leqslant x_1 \leqslant x\}.$$

由假定 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在域 Ω 上连续，显然，$\Omega_1 \subset \Omega$，$\Omega_2 \subset \Omega$，故 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 Ω_1 与 Ω_2 上连续. 根据化 n 重积分为累次积分的公式，我们有

$$\iint_{\Omega_1}\cdots\int f dx_1\cdots dx_n = \int_0^x dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f dx_n, \tag{1}$$

$$\iint_{\Omega_2}\cdots\int f dx_1\cdots dx_n = \int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f dx_1. \tag{2}$$

下证 $\Omega_1 = \Omega_2$，事实上，若 $(x_1,\cdots,x_n) \in \Omega_1$，则

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x, 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1,\cdots,0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1}, \tag{3}$$

从而

$$0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant x. \tag{4}$$

于是，

$$0 \leqslant x_n \leqslant x, x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x,\cdots,x_2 \leqslant x_1 \leqslant x. \tag{5}$$

由此可知 $(x_1,\cdots,x_n) \in \Omega_2$. 反之，若 $(x_1,\cdots,x_n) \in \Omega_2$，则 (5) 式成立，从而 (4) 式显然成立，由此又知 (3) 式成立，故 $(x_1,\cdots,x_n) \in \Omega_1$，于是 $\Omega_1 = \Omega_2$ 获证. 由此，再根

据(1)式与(2)式，即得

$$\int_0^t dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f dx_n$$

$$=\int_0^t dx_n\int_{x_n}^t dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^t f dx_1.$$

证毕.

4203. 证明

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n,$$

其中 f 为连续函数.

证 证法一：

我们有

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$

$$=\int_0^t f(t_1)dt_1\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2$$

$$\cdots\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n.$$

令 $F(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau$. 由于 f 是连续函数，故 $F'(s)=f(s)$. 我们有(注意到 $F(0)=0$)

$$\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$=\int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}$$

$$=\int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1})F'(t_{n-1})dt_{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}[F(t_{n-1})]^2\Big|_{t_{n-1}=0}^{t_{n-1}=t_{n-2}}$$

$$= \frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2,$$

由此

$$\int_0^{t_{n-3}} f(t_{n-2})dt_{n-2}\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}$$

$$\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$= \int_0^{t_{n-3}} \frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2 F(t_{n-2})dt_{n-2}$$

$$= \frac{1}{3!}[F(t_{n-3})]^3,$$

…………………………………….

这样继续下去，显然有

$$\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}[F(t_1)]^{n-1}.$$

于是，

$$\int_0^t f(t_1)dt_1\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!}[F(t_1)]^{n-1}f(t_1)dt_1$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t [F(t_1)]^{n-1}F'(t_1)dt_1$$

$$= \frac{1}{n!}[F(t)]^n = \frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n.$$

从而

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n.$$ 证毕.

证法二：

用归纳法证明所述公式. 当 $n=1$ 时此公式显然成立，今设 $n=k$ 时成立，要证 $n=k+1$ 时也成立，我们有

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_k}f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}$$

$$=\int_0^t f(t_1)\left[\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_k}f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}\right]dt_1.$$

由于假定公式当 $n=k$ 时成立，故

$$\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_k}f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}$$

$$=\frac{1}{k!}\left\{\int_0^{t_1}f(\tau)d\tau\right\}^k.$$

从而 $\left(令\ F(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau,则\ F'(s)=f(s)\right)$

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_k}f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}$$

$$=\int_0^t f(t_1)\cdot\frac{1}{k!}\left\{\int_0^{t_1}f(\tau)d\tau\right\}^k dt_1$$

$$=\frac{1}{k!}\int_0^t [F(t_1)]^k F(t_1)dt_1$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}[F(t)]^{k+1}$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^{k+1},$$

因此，所述公式当 $n=k+1$ 时成立. 于是，由归纳法知所述公式对一切自然数 n 均成立. 证毕.

计算下列多重积分：

4204. (a) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$；

(б) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$.

解 (a) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^1dx_1\int_0^1dx_2\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_n\\
&=\int_0^1dx_1\int_0^1dx_2\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots\\
&\quad+x_{n-1}^2+\frac{1}{3})dx_{n-1}\\
&=\int_0^1dx_1\int_0^1dx_2\cdots\int_0^1\left(x_1^2+x_2^2+\cdots\right.\\
&\quad\left.+x_{n-2}^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)dx_{n-2}\\
&=\cdots\cdots\\
&=\frac{n}{3}.
\end{aligned}
$$

(б) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^1dx_1\int_0^1dx_2\cdots\int_0^1[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\\
&\quad+2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3\\
&\quad+\cdots+x_2x_n+x_3x_4+\cdots+x_3x_n+\cdots\\
&\quad+x_{n-1}x_n)]dx_n\\
&=\frac{n}{3}^{*)}+2\int_0^1dx_1\int_0^1dx_2\cdots\int_0^1[(x_1x_2+\cdots\\
&\quad+x_1x_n)+(x_2x_3+\cdots+x_2x_n)\\
&\quad+\cdots+x_{n-1}x_n]dx_n\\
&=\frac{n}{3}+2\left(\frac{n-1}{4}+\frac{n-2}{4}+\cdots+\frac{1}{4}\right)\\
&=\frac{n(3n+1)}{12}.
\end{aligned}
$$

*) 利用本题(a)的结果.

4205. $I_n = \underset{\substack{x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, \cdots, x_n\geqslant 0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a}}{\int\int\cdots\int} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$.

解 解法一：

化为累次积分，有

$$I_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2$$

$$\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n,$$

我们又知

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n$$

$$= \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} (a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1}) dx_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots$$

$$-x_{n-2}-x_{n-1})^2\Big|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\cdots-x_{n-2}}$$

$$= \frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2,$$

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} dx_{n-2}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1}$$

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n$$

$$= \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} \frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2 dx_{n-2}$$

$$= \frac{1}{3!}(a-x_1-\cdots-x_{n-3})^3,$$

…………………………………………………………

这样继续下去，显然有

$$\int_0^{a-x_1} dx_2\int_0^{a-x_1-x_2} dx_3$$

$$\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}.$$

于是，

$$I_n=\int_0^a \frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}dx_1=\frac{a^n}{n!}.$$

解法二：

我们有

$$I_n=\int_0^a dx_1\int_0^{a-x_1}dx_2\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n.$$

在右端的逐次积分中作代换：

$$x_1=a\xi_1,x_2=a\xi_2,\cdots,x_n=a\xi_n,$$

即得

$$I_n=a^n\int_0^1 d\xi_1\int_0^{1-\xi_1}d\xi_2\cdots\int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}}d\xi_n$$

$$=a^n\underset{\substack{\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\cdots,\xi_n\geqslant 0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=a^n\cdot I_n(1),$$

其中 $I_n(1)$ 表示当 $a=1$ 时积分 I_n 的值.

另一方面，我们有

$$I_n(1)=\int_0^1 d\xi_n\underset{\substack{\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\cdots,\xi_n\geqslant 0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}\leqslant 1-\xi_n}}{\iint\cdots\int} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}$$

$$=I_{n-1}(1)\int_0^1(1-\xi_n)^{n-1}d\xi_n$$

$$=\frac{I_{n-1}(1)}{n}.$$

反复运用上述循环公式，可得

$$I_n(1)=\frac{1}{n!},$$

于是,最后得

$$I_n=\frac{a^n}{n!}.$$

4206. $\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_n dx_n$.

解 $\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_n dx_n$.

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}\frac{1}{2}x_1x_2\cdots x_{n-1}^3 dx_{n-1}$$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-3}}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x_1x_2\cdots x_{n-2}^5 dx_{n-2}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1 x_1^{2n-1}dx_1$$

$$=\frac{1}{2\cdot4\cdots2n}=\frac{1}{2^n\cdot n!}.$$

注:也可利用 4203 题的结果直接得

$$\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_n dx_n$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\int_0^1\tau d\tau\right)^n=\frac{1}{n!2^n}.$$

4207. $\underset{\substack{x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,\cdots,x_n\geqslant0\\x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant1}}{\iint\cdots\int}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,dx_1dx_2\cdots dx_n$

解 作变换
$$\begin{aligned}x_1&=u_1(1-u_2),\\x_2&=u_1u_2(1-u_3),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\x_{n-1}&=u_1u_2\cdots u_{n-1}(1-u_n),\\x_n&=u_1u_2\cdots u_n,\end{aligned}$$

则由 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant 1$ 知

$$0 \leqslant u_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

且有

$$I = \begin{vmatrix} 1-u_2 & u_2(1-u_3) & \cdots u_2u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_2u_3\cdots u_n \\ -u_1 & u_1(1-u_3) & \cdots u_1u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_1u_3\cdots u_n \\ 0 & -u_1u_2 & \cdots \quad \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots u_1u_2\cdots u_{n-2}(1-u_n) & u_1\cdots u_{n-2}u_n \\ 0 & 0 & \cdots -u_1\cdots u_{n-1} & u_1\cdots u_{n-1} \end{vmatrix}.$$

如在每一列的元素上加上所有以后各列相应的元素，则在对角线下面的全部元素都等于零，而在对角线上的元素就等于 $1, u_1, u_1u_2, \cdots, u_1\cdots u_{n-1}$. 因此，得

$$I = u_1^{n-1}u_2^{n-2}\cdots u_{n-1}.$$

于是，最后得

$$\underset{\substack{x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, \cdots, x_n\geqslant 0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots x_n}\, dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$= \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 u_1^{n-\frac{1}{2}} u_2^{n-2}\cdots u_{n-1}\, du_1du_2\cdots du_{n-1}du_n$$

$$= \frac{2}{(n-1)!(2n+1)}.$$

4208. 求由平面

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 - \cdots + a_{in}x_n = \pm h_i (i = 1, 2, \cdots, n)$$

所界的 n 维平行 $2n$ 面体的体积，这里设 $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$.

解 令 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$,

即得 $2n$ 面体的体积

$$V=\int_{-h_1}^{h_1}\int_{-h_2}^{h_2}\cdots\int_{-h_n}^{h_n}\frac{1}{|\Delta|}d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=\frac{2^n h_1\cdots h_n}{|\Delta|}.$$

4209. 求 n 维角锥

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1, x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$$

$$(a_i>0, i=1,2,\cdots,n)$$

的体积.

解 令 $x_i=a_i\xi_i$, $(i=1,2,\cdots,n)$ 即得体积

$$V=a_1a_2\cdots a_n\underset{\substack{\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\cdots,\xi_n\geqslant 0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}{}^{*)}.$$

*）利用 4205 题的结果.

4210. 求由曲面

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2}, x_n=a_n$$

所界的 n 维锥的体积.

解 作代换：

$$x_1=a_1r\cos\varphi_1,$$

$$x_2=a_2r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-2}=a_{n-2}r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2},$$

$$x_{n-1}=a_{n-1}r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2},$$

$$x_n=a_nx_n',$$

则域 V 为

$$0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi_2 \leqslant \pi, \cdots,$$

$$0 \leqslant \varphi_{n-3} \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant 2\pi, r \leqslant x_n' \leqslant 1,$$

并且 $|I| = a_1 a_2 \cdots a_n r^{n-2} \sin^{n-3}\varphi_1 \sin^{n-4}\varphi_2 \sin\varphi_{n-3}$.

于是,体积为

$$V = a_1 a_2 \cdots a_n \int_0^1 r^{n-2} dr \int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-2} \int_r^1 dx_n'$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-3} d\varphi_{n-3}$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-3}\varphi_1 d\varphi_1 \cdots 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi_{n-3} d\varphi_{n-3}{}^{*)}$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot B\left(\frac{n-2}{2}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{n-3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdots B\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right)^{**)}$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{n-3}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{1}{\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

*）利用等式$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1}\varphi d\varphi (a > 0)$，即得

$$\int_0^{\pi} \sin^{a-1}\varphi d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{a-1}\varphi d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1}\varphi d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi.$$

**）利用 3856 题的结果.

4211. 求 n 维球体

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \leqslant a^2$$

的体积.

解 令 $x_i = a\xi_i (i = 1,2,\cdots,n)$,即得体积

$$V_n = \underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2}{\int\int\cdots\int} dx_1dx_2\cdots dx_n = a^nV_n(1),$$

其中 $V_n(1)$ 表示 $a = 1$ 时的 n 维球体的体积. 但是,

$$\begin{aligned}
V_n(1) &= \underset{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2\leqslant 1}{\int\int\cdots\int} d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n \\
&= \int_{-1}^{1} d\xi_n \underset{\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2\leqslant 1-\xi_n^2}{\int\int\cdots\int} d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_{n-1} \\
&= V_{n-1}(1)\int_{-1}^{1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}d\xi_n \\
&= 2V_{n-1}(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi d\varphi \\
&= 2V_{n-1}(1)\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \\
&= V_{n-1}(1)\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},
\end{aligned}$$

因为 $V_1(1) = 2$,故由上述循环公式可得

$$V_n(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

因而,所求的体积为

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

对于 n 为偶数及奇数，分别可得公式

$$V_{2m}=\frac{\pi^m}{m!}a^{2m},$$

$$V_{2m+1}=\frac{2\cdot(2\pi)^m}{(2m+1)!}a^{2m+1}.$$

特别是，对于 V_1,V_2,V_3 可求得熟知的值：$2a,\pi a^2,\frac{4}{3}\pi a^3$.

4212. 求 $\iint_\Omega\cdots\int x_n^2dx_1dx_2\cdots dx_n$，其中域 Ω 是由下列不等式所确定：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots x_{n-1}^2\leqslant a^2,\quad -\frac{h}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{h}{2}.$$

解 $\iint_\Omega\cdots\int x_n^2dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_n^2dx_n\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2}\cdots\int dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$=\frac{h^3}{12}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a^{n-1\,*)}.$$

*）利用 4211 题的结果.

4213. 计算

$$\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant1}\cdots\int\frac{dx_1dx_2\cdots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}.$$

解 $\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2\leqslant1}\cdots\int\frac{dx_1dx_2\cdots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$

$$=\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant1}\cdots\int dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$\int_{-\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}} \frac{dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$=\pi \underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leq 1}{\int\cdots\int} dx_1 dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$=\pi\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)} {}^{*)} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

*）利用 4211 题的结果.

4214. 证明等式

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n$$

$$=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}du.$$

证 $\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2}\cdots\int_{x_2}^x dx_1 {}^{*)}$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2}$$

$$\cdots\int_{x_3}^x (x-x_2)dx_2$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2}$$

$$\cdots\int_{x_4}^x \frac{1}{2}(x-x_3)^2 dx_3$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2}$$

$$\cdots\int_{x_5}^x \frac{1}{2\cdot 3}(x-x_4)^3 dx_4$$

$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$= \int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x \frac{1}{(n-2)!}(x - x_{n-1})^{n-2} dx_{n-1}$$

$$= \int_0^x \frac{(x - x_n)^{n-1}}{(n-1)!} f(x_n)dx_n.$$

在上述积分中，将 x_n 代之以 u，不影响积分的值，故得

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx$$

$$= \int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}du.$$

*）利用 4202 题的结果.

4215. 证明等式

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1})dx_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u)du.$$

证 利用 4202 题的结果，即得

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1})dx_{n+1}$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1}dx_{n-1}$$

$$\cdots \int_{x_2}^x x_1 dx_1$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1}dx_{n-1}$$

$$\cdots \int_{x_3}^x \frac{1}{2}(x^2 - x_2^2)x_2 dx_2$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1}dx_{n-1}$$

$$\cdots\int_{x_4}^{x} \frac{1}{2^2 \cdot 2}(x^2 - x_3^2)^2 x_3 dx_3$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^{x} \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$\cdot (x^2 - x_n^2)^{n-1} x_n dx_n$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2^n n!} f(x_{n+1})(x^2 - x_{n+1})^n dx_{n+1}.$$

于是，将 x_{n+1} 代之以 u，不影响积分的值，故得

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.$$

4216. 证明迪里黑里公式

$$\iint\limits_{\substack{x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant 1}} \cdots \int x_1^{p_1 - 1} x_2^{p_2 - 1}$$

$$\cdots x_n^{p_n - 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots p_n + 1)}$$

$$(p_1, p_2, \cdots, p_n > 0).$$

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n = 1$ 时，公式显然成立，即

$$\int\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant 1} x_1^{p_1 - 1} dx_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1 + 1)}.$$

其次，设公式对 $n - 1$ 成立，今证公式对 n 也成立. 为此，将公式左端写为

$$\int_0^1 x_n^{p_n - 1} dx_n \iint\limits_{\substack{x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leqslant 1 - x_n}} \cdots \int x_1^{p_1 - 1} x_2^{p_2 - 1}$$

$$\cdots x_n^{p_{n-1}-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

在里面的 $n-1$ 重积分中进行代换：

$x_1 = (1-x_n)\xi_1, x_2 = (1-x_n)\xi_2, \cdots,$

$x_{n-1} = (1-x_n)\xi_{n-1},$

即得

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots,p_{n-1}+1)} \cdot \int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}}dx_n$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)} \cdot B(p_n, p_1\cdots+p_{n-1}+1)$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)} \cdot \frac{\Gamma(p_n)\cdot\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}.$$

这样一来，我们得知公式对 n 重积分也正确. 从而对 n 为任意的自然数时，迪里黑里公式均成立.

4217. 证明柳维耳公式

$$\underset{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geq 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leq 1}}{\iint\cdots\int} f(x_1+x_2+\cdots+x_n) \cdot x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \cdot \int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}du$$

$(p_1, p_2, \cdots, p_n > 0)$,

式中 $f(u)$ 为连续函数.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n = 1$ 时,公式显然成立.当 $n = 2$ 时,公式也成立,即

$$\iint\limits_{\substack{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 \leqslant 1}} f(x_1 + x_2) x_1^{p_1 - 1} x_2^{p_2 - 1} dx_1 dx_2$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)} \int_0^1 f(u) u^{p_1 + p_2 - 1} du.$$

事实上,令 Ω 表域:$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 \leqslant 1$.

作代换:

$x_1 = \xi_1, x_1 + x_2 = \xi_2$,及 $t = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$,

则有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x_1 + x_2) x_1^{p_1 - 1} x_2^{p_2 - 1} dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 \int_0^{\xi_2} \xi_1^{p_1 - 1} (\xi_2 - \xi_1)^{p_2 - 1} d\xi_1$$

$$= \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 \int_0^1 t^{p_1 - 1} (1 - t)^{p_2 - 1} \xi_2^{p_1 + p_2 - 1} dt$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)} \int_0^1 f(\xi_2) \xi_2^{p_1 + p_2 - 1} d\xi_2$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)} \int_0^1 f(u) u^{p_1 + p_2 - 1} du.$$

其次,设公式对于 $n - 1$ 成立,今证对于 n 公式也成立,为此,将公式左端写为

$$\iint\limits_{\substack{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leqslant 1}} \cdots \int x_1^{p_1 - 1} x_2^{p_2 - 1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1} - 1} dx_1 dx_2$$

$$\cdots dx_n\int_0^{1-(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})} f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$
$$\cdot x_n^{p_n-1}dx_n.$$

如令

$$\psi(t)=\int_0^{1-t} f(t+x_n)x_n^{p_n-1}dx_n$$

代入上式，并利用公式对 $n-1$ 成立的假定，得知上式为

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}$$
$$\cdot\int_0^1\psi(t)t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}dt.$$

利用上面已证的 $n=2$ 时的公式，于是即得

$$\iint\limits_{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$
$$\cdot x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\int_0^1 dt\int_0^{1-t} f(t+x_n)$$
$$\cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}x_n^{p_n-1}dx_n$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\iint\limits_{\substack{t,x_n\geqslant 0\\ t+x_n\leqslant 1}} f(t+x_n)$$
$$\cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}x_n^{p_n-1}dtdx_n$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$
$$\cdot\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}du$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\cdot\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}du,$$

即公式对于 n 成立. 从而, 公式对于任意自然数均成立.

4218$^+$ 将展布于域 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 上的 n 重积分 $(n\geqslant 2)$

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})dx_1dx_2\cdots dx_n$$

化为单积分, 其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 作代换:

$$x_1=Rr\cos\varphi_1,$$

$$x_2=Rr\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}=Rr\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$

$$x_n=Rr\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}.$$

则有

$$I=R^nr^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

于是,

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=R^n\int_0^1 r^{n-1}f(Rr)dr\int_0^\pi\sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1\cdot\int_0^\pi\sin^{n-3}\varphi_2 d\varphi_2\cdots\int_0^\pi\sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}$$

$$=2\pi R^n\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\cdot\int_0^1 r^{n-1}f(Rr)dr^{*)}$$

$$=R^n\frac{2\pi\cdot\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 r^{n-1}f(Rr)dr$$

$$=R^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1(r^2)^{\frac{n}{2}-1}f(Rr)d(r^2)$$

$$=R^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1}f(R\sqrt{u})du.$$

*）参看4210题的计算过程.

4219. 计算半径为 R，密度为 ρ_0 的均匀球对自己的位，即求积分

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2\\x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}}\iiint\frac{dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

解 我们有

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}dx_1dy_1dz_1$$

$$\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}\frac{dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}}.$$

由4155题的结果可知

$$\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\le R^2} \frac{dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}} = 2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2,$$

其中 $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. 于是(利用球坐标)

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\le R^2} \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2\right)dx_1dy_1dz_1$$

$$= \frac{\rho_0^2}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi$$

$$\cdot \int_0^R\left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r^2\right)r^2dr$$

$$= \frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2R^5.$$

4220. 设 $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij} = a_{ji})$ 为正定形,计算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^n b_ix_i+c\right)}dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

解 作变量代换

$$x_i = y_i + \alpha_i \quad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

其中诸常数 α_i 以下再确定. 于是易得(注意到 $a_{ij} = a_{ji}$)

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^n b_ix_i + c$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_iy_j + 2\sum_{i=1}^n\left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j\right) + b_i\right]y_i$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\alpha_i\alpha_j + 2\sum_{i=1}^n b_i\alpha_i + c.$$

由于 $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ 是正定形,故必有 $\delta = |a_{ij}| > 0$,从而线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + b_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

有唯一的一组解 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，今取变换(1) 式中的诸 α_i 即为方程组(2) 的解. 于是，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j + c', \tag{3}$$

其中
$$\begin{aligned} c' &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\Big)\alpha_i + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + c \\ &= -\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + c \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + c. \end{aligned} \tag{4}$$

下面我们用诸 a_{ij} 和 b_i 及 c 来表出 c' 令

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{vmatrix}$$

($n+1$ 阶行列式，即 $|a_{ij}|$ 的加边行列式). 将此行列式的行一列乘上 α_1，第二列乘上 α_2，…，第 n 列乘上 α_n 都加到第 $n+1$ 列上去，并注意到(2) 式与(4) 式，得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + b_i \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ b_j & \vdots & \sum_{j=1}^{n} b_j\alpha_j + c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix} = c' |a_{ij}| = c' \delta,$$

故

$$c' = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{5}$$

由于 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$ 是正定二次型，故由高等代数中二次型的理论知，存在正交矩阵

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{pmatrix},$$

使在线性变换

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j (i = 1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

下，二次型变为平方和：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2, \tag{7}$$

其中 $\lambda_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$；也即

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 由于 P 为正交矩阵，

故 $P^{-1} = P'$ (P' 表 P 的转置矩阵)，且 $|P| = |p_{ij}| = \pm$

1. 由(8)式又知

$$\delta = |a_{ij}| = |P^{-1}| \cdot |\Lambda| \cdot |P| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{9}$$

根据(1)式与(6)式，可知

$$\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)} = 1,$$

$$\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(z_1,\cdots,z_n)} = |p_{ij}| = |P| = \pm 1.$$

于是，利用广义 n 重积分的变量代换公式，并注意到被积函数的非负性，得(注意(3)式、(5)式与(7)式)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i + c\right\}} \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_i y_j + \frac{\Delta}{\delta}\right\}} \left|\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\right| dy_1 dy_2 \cdots dy_n$$

$$= e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_i y_j\right\}} dy_1 dy_2 \cdots dy_n$$

$$= e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i z_i^2} \left|\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(z_1,\cdots,z_n)}\right| dz_1 dz_2 \cdots dz_n$$

$$= e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i z_i^2} dz_1 dz_2 \cdots dz_n$$

$$= e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 z_1^2} dz_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_2 z_2^2} dz_2\right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_n z_n^2} dz_n\right).$$

作代换 $z_i = \frac{u}{\sqrt{\lambda_i}}$ (i 固定)，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_i z_i^2} dz_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}} (i = 1, 2, \cdots, n).$$

以此代入上式，并注意到(9)式，最后得

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c\right)}$$
$$\cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= e^{-\frac{\Delta}{\delta}} \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}} e^{-\frac{\Delta}{\delta}}.$$

§11. 曲线积分

1° 第一型的曲线积分　若 $f(x, y, z)$ 在平滑曲线 C

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \, (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

的各点上有定义并且是连续的函数，ds 为弧的微分，则

$$\int_C f(x, y, z) ds$$
$$= \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)] \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

这个积分的特性在于它与曲线 C 的方向无关.

2° 第一型曲线积分在力学方面的应用　若 $\rho = \rho(x, y, z)$ 为曲线 C 在流动点 (x, y, z) 的线密度，则曲线 C 的质量等于

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

此曲线的重心坐标 (x_0, y_0, z_0) 由下面的公式来表示

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds,$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\int_c y\rho(x,y,z)ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\int_c z\rho(x,y,z)ds.$$

3° 第二型的曲线积分　若函数 $P = P(x,y,z)$，$Q = Q(x,y,z)$，$R = R(x,y,z)$ 在曲线(1)上的各点上是连续的，这曲线的方向是使参数 t 增加的方向，则

$$\int_c P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_{t_0}^{T}\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)$$

$$+ R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt. \tag{2}$$

当曲线 C 环行的方向变更时此积分的符号也变更. 在力学上积分(2)是当其作用点描绘出曲线 C 时变力 $\{P,Q,R\}$ 所作的功.

4° 全微分的情形　若

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = du,$$

式中 $u = u(x,y,z)$ 为域 V 内的单值函数，则与完全位于域 V 内的曲线 C 的形状无关，而有：

$$\int_c Pdx + Qdy + Rdz = u(x_2,y_2,z_2) - u(x_1,y_1,z_1),$$

式中 (x_1,y_1,z_1) 为路径的始点，(x_2,y_2,z_2) 为路径的终点. 最简单的情况是域 V 是单联通的而函数 P,Q,R 有连续的一级偏导函数，对于此事的充分而且必要的条件为：在域 V 内，下列条件恒满足：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时，函数 u 可按下面的公式来求得

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy$$

$$+ \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为域 V 内某一固定的点.

在力学上这个情况对应于位力所作的功.

计算下列第一型的曲线积分：

4221. $\int_C (x+y)ds$，其中 C 为以 $O(0,0)$，$A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形围线.

解 $\int_C (x+y)ds$

$$= \int_{OA}(x+y)ds + \int_{AB}(x+y)ds + \int_{BO}(x+y)ds$$

$$= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \sqrt{2}\, dx + \int_0^1 y dy = 1 + \sqrt{2}.$$

4222. $\int_C y^2 ds$，其中 C 为摆线 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的一拱.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt$$

$$= 2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

于是，

$$\int_C y^2 ds = 2a^3\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}(1-\cos t)^2 dt$$

$$= 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt = 32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u du$$

$$= \frac{256}{15}a^3.$$

4223. $\int_C (x^2+y^2)ds$，其中 C 为曲线 $x = a(\cos t + t\sin t)$，$y = a(\sin t - t\cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}dt = atdt.$$

于是，

$$\int_c (x^2+y^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]atdt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^3t(1+t^2)dt=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

4224. $\int_c xyds$，其中 C 为双曲线 $x=a\operatorname{ch}t, y=a\operatorname{sh}t(0\leqslant t\leqslant t_0)$ 的弧.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2t+a^2\operatorname{ch}^2t}dt=a\sqrt{\operatorname{ch}2t}dt.$$

于是，

$$\int_c xyds=a^3\int_0^{t_0}\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t\sqrt{\operatorname{ch}2t}dt$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{t_0}\operatorname{sh}2t\sqrt{\operatorname{ch}2t}dt$$

$$=\frac{a^3}{4}\int_0^{t_0}\sqrt{\operatorname{ch}2t}d(\operatorname{ch}2t)$$

$$=\frac{a^3}{6}(\sqrt{\operatorname{ch}^32t_0}-1).$$

4225. $\int_c(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$，其中 C 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的弧.

解 方法一：

按直角坐标方程计算，弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx.$$

于是，

$$\int_c(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$$

$$= 4\int_0^a [x^{\frac{4}{3}} + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^2] \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$= 4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a (2x + a^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}})dx = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

方法二：

按参数方程计算. 若令 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, 则

$$ds = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt$$

$$= 3a\cos t\sin t dt\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

于是，

$$\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds$$

$$= 4a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \cdot 3a\cos t\sin t dt$$

$$= 24a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t d(\sin t) = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$，其中 C 为由曲线 $r = a, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$（$r$ 和 φ 为极坐标）所界的凸围线.

解 凸围线由三段组成，分别是：直线段 $\varphi = 0(0 \leqslant r \leqslant a)$；圆弧段 $r = a\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$；直线段 $\varphi = \frac{\pi}{4}(0 \leqslant r \leqslant a)$，弧长的微分相应地是：$ds = dr$；$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi = ad\varphi$；$ds = dr$. 于是，

$$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^r dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\varphi + \int_0^a e^r dr$$

$$= 2(e^a - 1) + \frac{\pi a e^a}{4}.$$

4227. $\int_C |y| ds$，其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 的弧.

解 双纽线的极坐标方程为 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$. 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi.$$

于是，

$$\int_C |y| ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$$

$$= 4a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2(2-\sqrt{2}).$$

4228. $\int_C x ds$，其中 C 为对数螺线 $r = ae^{k\varphi}(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的部分.

解 弧长的微分为

$$ds = ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi(-\infty<\varphi<0).$$

于是，

$$\int_C x ds = \int_{-\infty}^0 ae^{k\varphi}\cos\varphi \cdot ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi$$

$$= a^2\sqrt{1+k^2}\frac{2k\cos\varphi+\sin\varphi}{1+4k^2}e^{2k\varphi}\Big|_{-\infty}^0$$

$$= \frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}.$$

4229. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ax$.

解 对于上半圆周，弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2}dx = \frac{a}{2y}dx$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}} dx (0 \leqslant x \leqslant a).$$

于是，

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds = 2\int_0^a \sqrt{ax} \cdot \frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}} dx$$

$$= a\sqrt{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a - x}} = 2a^2.$$

4230. $\int_C \frac{ds}{y^2}$，其中 C 为悬链线 $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch}\frac{x}{a} dx.$$

于是，

$$\int_C \frac{ds}{y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}} dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)}{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

求下列空间曲线的弧长（参数是正的）：

4231. $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = 3(2t^2 + 1) dt.$$

于是，弧长为

$$s = \int_0^1 3(2t^2 + 1) dt = 5.$$

4232. $x=e^{-t}\cos t, y=e^{-t}\sin t, z=e^{-t}$，当 $0<t<+\infty$.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{e^{-2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{-2t}(\cos t+\sin t)^2+e^{-2t}}dt$$

$$=\sqrt{3}e^{-t}dt.$$

于是，弧长为

$$s=\sqrt{3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\sqrt{3}.$$

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}, z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}+\frac{a^4}{4(a^2-x^2)^2}}dx$$

$$=\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}dx(|x_0|<a).$$

于是，当 $x_0\geqslant 0$ 时，有

$$s=\int_0^{x_0}\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}dx$$

$$=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}+x_0=|z_0|+|x_0|;$$

当 $x_0<0$ 时，有

$$s=\int_{x_0}^0\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}dx$$

$$=-\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0=|z_0|+|x_0|.$$

总之，当 $|x_0|<a$，有 $s=|z_0|+|x_0|$.

4234. $(x-y)^2=a(x+y), x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

解 由 $(x-y)^2=a(x+y)$，$x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ 可解得

$$x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4}+\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\sqrt[3]{z^2}\right],$$

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4}-\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\sqrt[3]{z^2}\right].$$

由于

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$$

$$=\frac{8}{9a^2}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^4}\sqrt[3]{z^2}+\frac{2}{9}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^{-2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}\sqrt[3]{z^2}+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\sqrt[3]{z^{-2}},$$

故弧长为

$$s=\int_0^{z_0}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}\sqrt[3]{z^2}+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\sqrt[3]{z^{-2}}+1}\,dz$$

$$=\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\frac{1}{t}+1}\cdot\frac{3\sqrt{t}}{2}dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t^2+t+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}}\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right]dt$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}}\left[\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right].$$

4235. $x^2+y^2=cz$，$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

解 取曲线的参数方程为

$$x=\sqrt{cz}\cos\frac{z}{c},y=\sqrt{cz}\sin\frac{z}{c},z=z,$$

则弧长的微分为

$$ds=\left\{\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\cos\frac{z}{c}-\sqrt{\frac{z}{c}}\sin\frac{z}{c}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\sin\frac{z}{c}+\sqrt{\frac{z}{c}}\cos\frac{z}{c}\right)^2+1\right\}^{\frac{1}{2}}dz$$

$$=\sqrt{\frac{c}{4z}+\frac{z}{c}+1}dz=\frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}dz.$$

于是,弧长为

$$s=\int_0^{z_0}\frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}dz=\int_0^{z_0}\sqrt{\frac{z}{c}}dz+\int_0^{z_0}\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}dz$$

$$=\sqrt{cz_0}\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right).$$

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ch}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=a$ 从点 $A(a,0,0)$ 到点 $B(x,y,z)$.

解 令 $x=\sqrt{a^2-z^2}\cos\varphi,y=\sqrt{a^2-z^2}\sin\varphi$,不妨设 $z>0$,则有

$$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$

$$=\sqrt{a^2\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi}\right)}=a\operatorname{th}\varphi.$$

而 $\sqrt{a^2-z^2}=\sqrt{a^2(1-\operatorname{th}^2\varphi)}=\dfrac{a}{\operatorname{ch}\varphi}$,故

$x=\dfrac{a\cos\varphi}{\operatorname{ch}\varphi},y=\dfrac{a\sin\varphi}{\operatorname{ch}\varphi},z=a\operatorname{th}\varphi$ 为曲线的参数方程,弧长的微分为

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$$

$$=a\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2\varphi+\operatorname{sh}^2\varphi+1}{\operatorname{ch}^4\varphi}}\,d\varphi$$

$$=\sqrt{2}\,a\,\frac{d\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}.$$

于是,弧长为

$$s=\int_0^\varphi\sqrt{2}\,a\,\frac{d\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}=\sqrt{2}\,a\int_0^\varphi\frac{2}{e^\varphi+e^{-\varphi}}d\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\,a\int_0^\varphi\frac{1}{1+(e^\varphi)^2}d(e^\varphi)$$

$$=2\sqrt{2}\,a\operatorname{arctg}e^\varphi\Big|_0^\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\,a\left(\operatorname{arctg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)^{*)}$$

$$=\sqrt{2}\,a\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}.^{**)}$$

容易推证,当 $z<0$ 时,弧长为

$$s=\sqrt{2}\,a\operatorname{arctg}\frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

总之,最后得

$$s=\sqrt{2}\,a\operatorname{arctg}\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

*) 由 $z=a\operatorname{th}\varphi$ 知:

$$z(e^\varphi+e^{-\varphi})=a(e^\varphi-e^{-\varphi}),$$

$$z(e^{2\varphi}-1)=a(e^{2\varphi}-1),$$

从而

$$e^{2\varphi}=\frac{a+z}{a-z}\text{ 或 }e^\varphi=\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

**) 由于

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$$

$$=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z},$$

故在主值范围内有

$$\operatorname{arctg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

计算沿空间曲线所取的第一型曲线积分：

4237. $\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$，其中 C 为螺线 $x=a\cos t, y=a\sin t$，$z=bt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2+b^2}dt.$$

于是，

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt$$

$$=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}.$$

4238. $\int_C x^2 ds$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$.

解 方法一

作代换：

$$u=\frac{x-y}{\sqrt{2}},v=\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}},$$

$$w=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}},$$

则圆周 C 化为

$$u^2+v^2+w^2=a^2,w=0.$$

于是，

$$\int_c x^2ds=\int_c\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{6}}+\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2ds$$

$$=\int_c\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{6}}\right)^2ds$$

$$=\frac{1}{6}\int_c(3u^2+v^2)ds+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_c uvds$$

$$=\frac{1}{6}\int_c a^2ds+\frac{1}{3}\int_c u^2ds+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_c uvds$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}a^3\cos^2\varphi d\varphi$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}a^3\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{1}{3}\pi a^3=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

方法二

由对称性知：

$$\int_c x^2ds=\int_c y^2ds=\int_c z^2ds.$$

于是，

$$\int_c x^2ds=\frac{1}{3}\int_c(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$= \frac{a^2}{3}\int_C ds = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

4239. $\int_C z ds$，其中C为圆锥螺线$x = t\cos t, y = t\sin t, z = t\ (0 \leqslant t \leqslant t_0)$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt$$
$$= \sqrt{2 + t^2}\,dt.$$

于是，

$$\int_C z ds = \int_0^{t_0} t\sqrt{2 + t^2}\,dt = \frac{1}{3}[(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}].$$

4240. $\int_C z ds$，其中C为曲线$x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax$上从点$O(0,0,0,)$到点$A(a,a,a\sqrt{2})$的弧.

解 由曲线方程得

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{a^2} + y^2} = \frac{y}{a}\sqrt{y^2 + a^2}.$$

从而，曲线的参数方程可取为

$$x = \frac{y^2}{a}, y = y, z = \frac{y}{a}\sqrt{y^2 + a^2}.$$

弧长的微分为

$$ds = \sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2y^2 + a^2}{a\sqrt{y^2 + a^2}}\right)^2}\,dy$$

$$= \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2y^2 + 2a^4}{a^2(y^2 + a^2)}}\,dy.$$

于是，

$$\int_C z ds$$

$$= \int_0^a \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2} \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2y^2 + 2a^4}{a^2(y^2 + a^2)}} dy$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{a^2} \int_0^a y \sqrt{y^4 + \frac{9}{8}a^2y^2 + \frac{1}{4}a^4} dy$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \int_0^a \sqrt{\left(y^2 + \frac{9a^2}{16}\right)^2 - \frac{17a^4}{16^2}}$$

$$\cdot d\left(y^2 + \frac{9a^2}{16}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \left[\frac{y^2 + \frac{9a^2}{16}}{2} \sqrt{y^4 + \frac{9}{8}a^2y^2 + \frac{1}{4}a^4}\right.$$

$$- \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln\left(y^2 + \frac{9a^2}{16}\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{y^4 + \frac{9}{8}a^2y^2 + \frac{1}{4}a^4}\right)\right]\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \left[\left(\frac{25a^4}{64} \sqrt{\frac{19}{2}}\right.\right.$$

$$\left. - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{25a^2 + 8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}\right)$$

$$\left. - \left(\frac{9a^4}{64} - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{17a^2}{16}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \frac{25a^4 \sqrt{38} - 18a^4}{128}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{a^2} \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{\frac{17a^2}{16}}{\frac{25a^2 + 8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}}$$

$$= \frac{a^2}{256\sqrt{2}}\Big[100\sqrt{38} - 72$$

$$- 17\ln\frac{25 + 4\sqrt{38}}{17}\Big].$$

4241⁺. 设曲线 $x = a\cos t, y = b\sin t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 在点 (x, y) 的线密度等于 $\rho = |y|$，求其质量.

解 质量 $m = \int_C |y| ds$，其中 C 为椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

先设 $a > b$. 这时

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= a\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,dt,$$

其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. 于是，

$$m = \int_0^\pi ab\sin t\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$$

$$+ \int_\pi^{2\pi} a(-b\sin t)\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= -ab\int_0^\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,d(\cos t)$$

$$+ ab\int_\pi^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,d(\cos t)$$

$$= ab\int_{-1}^1 \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}\,du + ab\int_{-1}^1 \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}\,du$$

$$= 4ab\int_0^1 \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}\,du$$

$$= \frac{4ab}{\varepsilon}\Big[\frac{1}{2}\varepsilon u\sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2} + \frac{1}{2}\arcsin(\varepsilon u)\Big]\Big|_{u=0}^{u=1}$$

$$= 2b^2 + 2ab\,\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}.$$

次设 $a < b$. 这时

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$$
$$= a\sqrt{1 + \varepsilon_1^2\cos^2 t}dt,$$

其中 $\varepsilon_1 = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 仿前，有

$$m = \int_0^{\pi} ab\sin t\sqrt{1 + \varepsilon_1^2\cos^2 t}dt$$
$$+ \int_{\pi}^{2\pi} a(-b\sin t)\sqrt{1 + \varepsilon_1^2\cos^2 t}dt$$
$$= 4ab\int_0^1 \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 u^2}du$$
$$= \frac{4ab}{\varepsilon_1}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_1 u\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 u^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1 u + \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 u^2})\right\}\Bigg|_{u=0}^{u=1}$$
$$= 2b^2 + 2ab\frac{\ln(\varepsilon_1 + \sqrt{1 + \varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}.$$

最后，若 $a = b$，则椭圆退化成圆，这时 $ds = adt$，故

$$m = \int_0^{\pi} a^2\sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-a\sin t)adt = 4a^2$$

综上所述，可知

$$m = \begin{cases} 2b^2 + 2ab\dfrac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}, & \text{若 } a > b; \\ 2b^2 + 2ab\dfrac{\ln(\varepsilon_1 + \sqrt{1 + \varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}, & \text{若 } a < b; \\ 4a^2, & \text{若 } a = b, \end{cases}$$

其中 $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}(a > b)$,

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \ (a < b).$$

4242. 求曲线 $x = at, y = \frac{a}{2}t^2, z = \frac{a}{3}t^3 (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 的弧之质量，其密度依规律 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ 而变化.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2 + a^2t^2 + a^2t^4}dt \\ &= a\sqrt{1 + t^2 + t^4}dt, \end{aligned}$$

而密度 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}} = t$. 于是，质量为(作代换 $u = t^2$)

$$\begin{aligned} m &= \int_c \sqrt{\frac{2y}{a}}ds = a\int_0^1 t\sqrt{1 + t^2 + t^4}dt \\ &= \frac{a}{2}\int_0^1 \sqrt{1 + u + u^2}du \\ &= \frac{a}{2}\left\{\frac{u + \frac{1}{2}}{2}\sqrt{1 + u + u^2}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{3}{8}\ln\left(u + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + u + u^2}\right)\right\}\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{a}{8}\left\{(3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2}\ln\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right\}. \end{aligned}$$

4243. 计算均匀的曲线 $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 从点 $A(0,a)$ 到点 $B(b,h)$ 的弧的重心的坐标.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}dx = \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx.$$

质量为

$$m = \rho_0\int_0^b \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = a\rho_0 \operatorname{sh}\frac{b}{a} = \rho_0\sqrt{h^2 - a^2}.^{*)}$$

于是,重心的坐标为

$$x_0 = \frac{\rho_0}{m}\int_0^b x\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx$$

$$= \frac{\rho_0}{m}\left[ab\operatorname{sh}\frac{b}{a} - a^2\left(\operatorname{ch}\frac{b}{a} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}}\left[b\sqrt{h^2 - a^2} - a^2\left(\frac{h}{a} - 1\right)\right]$$

$$= b \quad a\sqrt{\frac{h-a}{h-a}};$$

$$y_0 = \frac{\rho_0}{m}\int_0^b y\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = \frac{a\rho_0}{m}\int_0^b \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}dx$$

$$= \frac{a\rho_0}{m}\int_0^b \frac{1 + \operatorname{ch}2x}{2}dx$$

$$= \frac{a\rho_0}{m}\left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right)\Bigg|_0^b$$

$$= \frac{a\rho_0}{m}\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{4}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}}\left(\frac{b}{2} + \frac{h}{2}\,\frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}\right)$$

$$= \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2 - a^2}}.$$

*) 由 $h = a\operatorname{ch}\frac{b}{a}$ 知:$\operatorname{ch}\frac{b}{a} = \frac{h}{a}$. 从而

$$\operatorname{sh}\frac{b}{a} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{b}{a} - 1} = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}.$$

4244. 求摆线

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ 的弧的重心.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= 2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

质量为

$$m = 2a\rho_0\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt = 4a\rho_0.$$

于是,重心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_0^\pi \rho_0 a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}dt - \frac{a}{2}\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= -at\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi + a\int_0^\pi \cos\frac{t}{2}dt$$

$$+ \frac{a}{4}\int_0^\pi\left(\cos\frac{3t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{4a}{3}.$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_0^\pi \rho_0 a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt - \frac{a}{4}\int_0^\pi\left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{4a}{3}.$$

4245. 计算球面上的三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2$;$x>0,y>0,z>0$ 的围线的重心的坐标.

解 作球坐标变换:

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,$$

$$z = r\sin\psi,$$

则球面上的三角形三条曲边的方程分别是:

$$x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = 0; 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$x = a\cos\psi, y = 0, z = a\sin\psi; 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$x = 0, y = a\cos\psi, z = a\sin\psi, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

又因围线的周长为

$$s = 3 \cdot \frac{\pi a}{2} = \frac{3\pi a}{2}.$$

于是,重心的坐标为

$$x_0 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi \cdot a d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\psi \cdot a d\psi}{\frac{3\pi a}{2}}$$

$$= \frac{2a^2}{\frac{3\pi a}{2}} = \frac{4a}{3\pi}.$$

利用对称性知:$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}$.

4246. 求均匀的弧 $x = e^t\cos t, y = e^t\sin t, z = e^t (-\infty < t \leqslant 0)$ 的重心的坐标.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}}dt$$

$$= \sqrt{3}e^t dt.$$

质量为

$$m = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{3}e^t dt = \sqrt{3}.$$

于是,重心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0} e^t\cos t \cdot \sqrt{3}e^t dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\cos t dt$$

$$= \frac{2\cos t + \sin t}{5}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{2}{5}.$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0} e^t\sin t \cdot \sqrt{3}\, e^t dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\sin t dt$$

$$= \frac{2\sin t - \cos t}{5} e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{5}.$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0} e^t \cdot \sqrt{3}\, e^t dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt = \frac{1}{2}.$$

4247. 求螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = \frac{h}{2\pi}t\,(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的一枝对于坐标轴的转动惯量.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}}dt$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi}dt.$$

于是,转动惯量为

$$I_x = \int_c (y^2 + z^2)ds$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)\frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi}dt$$

$$= \frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \pi$$

$$+ \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

$$I_y = \int_c (x^2 + z^2)ds$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}dt$$

$$= \frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\pi$$

$$+\frac{h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

$$I_z=\int_C (x^2+y^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}dt$$

$$=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

4248. 计算第二型的曲线积分

$$\int_{OA} xdy-ydx,$$

式中 O 为坐标原点，A 点的坐标为(1,2) 并设：(а)OA 为直线段；(б)OA 为抛物线，其轴为 Oy；(в)OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 所组成的折线.

解 (а) 直线段的方程为 $y=2x$. 于是，

$$\int_{OA} xdy-ydx=\int_0^1(2x-2x)dx=0.$$

(б) 抛物线的方程为 $y=2x^2$. 于是，

$$\int_{OA} xdy-ydx=\int_0^1(4x^2-2x^2)dx=\frac{2}{3}.$$

(в) 线段 OB 的方程为 $y=0$，BA 的方程为 $x=1$. 于是，

$$\int_{OA} xdy-ydx=\int_0^1 0\cdot dx\int_0^2 dy=2.$$

4249. 对于上题中所指示的路径(а)，(б)，(в)，计算

$$\int_{OA} xdy+ydx.$$

解 (a) $\int_{OA} xdy + ydx = \int_0^1 (2x + 2x)dx = 2.$

(б) $\int_{OA} xdy + ydx = \int_0^1 (4x^2 + 2x^2)dx = 2.$

(в) $\int_{OA} xdy + ydx = \int_0^2 dy = 2.$

在参数增加的方向，沿所指示的曲线来计算下列第二型曲线积分：

4250. $\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$，其中$C$为抛物线 $y = x^2(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

解 由题设 $y = x^2$，从而 $dy = 2xdx$. 于是，

$$\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$$

$$= \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x^3) + 2x(x^4 - 2x^3)]dx$$

$$= -\frac{14}{15}.$$

4251. $\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$，其中$C$为曲线

$$y = 1 - |1 - x| (0 \leqslant x \leqslant 2).$$

解 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$y = 1 - (1 - x) = x$，从而 $dy = dx$；当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，$y = 1 - (x - 1) = 2 - x$，从而 $dy = -dx$. 于是，

$$\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$$

$$= \int_0^1 2x^2dx + \int_1^2 [x^2 + (2 - x)^2 - x^2 + (2 - x)^2]dx$$

$$= \frac{4}{3}.$$

4252. $\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$，其中 C 为依反时针方向通过的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 利用椭圆的参数方程

$$x=a\cos t, y=a\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

则有

$$\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)$$

$$+(a\cos t-b\sin t)b\cos t]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(ab\cos 2t-\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t\right)dt=0.$$

4253. $\int_C (2a-y)dx+xdy$，其中 C 为摆线

$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一拱.

解 由题设知：$dx=a(1-\cos t)dt, dy=a\sin t dt$.

于是，

$$\int_C (2a-y)dx+xdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)$$

$$+a(t-\sin t)a\sin t\}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2 t\sin t dt$$

$$=-a^2(t\cos t-\sin t)\Big|_0^{2\pi}=-2\pi a^2.$$

4254. $\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 C 为依反时针方向通过的圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解 利用圆的参数方程

$$x = a\cos t, y = a\sin t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

则有

$$\oint_C \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-(a\cos t + a\sin t)a\sin t - (a\cos t - a\sin t)a\cos t}{a^2} dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

4255. $\oint_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$，其中 $ABCDA$ 为以 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$ 为顶点的正方形的围线.

解 正方形各边的方程分别为

$$AB: y = 1 - x; \qquad BC: y = 1 + x;$$

$$CD: y = -1 - x; \qquad DA: y = -1 + x.$$

于是，

$$\oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$$

$$= \int_{AB} \frac{dx + dy}{x + y} + \int_{BC} \frac{dx + dy}{-x + y}$$

$$+ \int_{CD} \frac{dx + dy}{-x - y} + \int_{DA} \frac{dx + dy}{x - y}$$

$$= \int_1^0 (1 - 1)dx + \int_0^{-1} 2dx$$

$$+ \int_{-1}^0 (1 - 1)dx + \int_0^1 2dx$$

$$= 0.$$

4256. $\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy$，其中 AB 为界于点 $A(0,\pi)$ 和点 $B(\pi,0)$ 之间的直线段.

解 AB 的方程为 $y = \pi - x$. 于是，

$$\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(\pi - x)dx - \sin x dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin x - \sin x)dx = 0.$$

注：原题为 $\int_{AB} dx\sin y - dy\sin x$，若把它理解为 $\int_{AB} d(x\sin y) + d(y\sin x)$，其值仍为零，与原答案也符合.

4257. $\oint_{OmAnO} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}dy - dx$，其中 OmA 为抛物线段 $y = x^2$，OnA 为直线段 $y = x$.

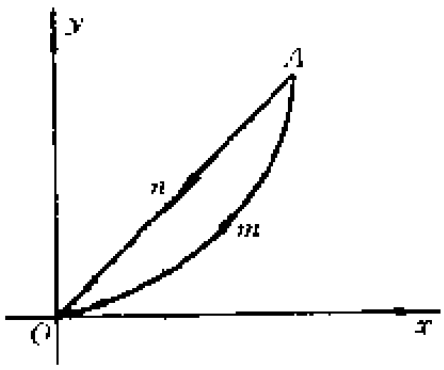

图 8.62

解 如图 8.62 所示，我们有

$$\oint_{OmAnO} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}dy - dx$$

$$= \int_{OmA} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}dy - dx$$

$$+ \int_{AnO} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}dy - dx$$

$$= \int_0^1 2x\operatorname{arctg}x dx - \int_0^1 dx$$

$$+ \int_1^0 (\operatorname{arctg}1 - 1)dx$$

$$= x^2\operatorname{arctg}x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$- 1 + \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)x\Big|_1^0$$

$$= \frac{\pi}{4} - (x - \operatorname{arctg}x)\Big|_0^1 - 1 - \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 1.$$

注：原题为 $\oint_{OmAnO} dy\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - dx$，若把它理解为 $\oint_{OmAnO} d\left(y\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) - dx$，则其值为零，与原答案不符.

验证被积函数为全微分，并计算下列曲线积分：

4258. $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx.$

解 显然，$xdy + ydx = d(xy)$ 是全微分. 于是，

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx$$

$$= \int_{(-1,2)}^{(2,3)} d(xy) = xy\Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 8.$$

4259. $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy.$

解 显然，$xdx + ydy = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$ 是全微分.

于是，

$$\int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy$$

$$= \int_{(0,1)}^{(3,-4)} d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{2}\Big|_{(0,1)}^{(3,-4)} = 12.$$

4260. $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y)dx + (x - y)dy.$

解 显然，我们有

$$(x+y)dx+(x-y)dy$$
$$=(ydx+xdy)+(xdx-ydy)$$
$$=d(xy)+d\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)$$
$$=d\left(xy+\frac{x^2-y^2}{2}\right),$$
即是全微分. 于是,
$$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$$
$$=\int_{(0,1)}^{(2,3)}d\left(xy+\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$
$$=\left(xy+\frac{x^2-y^2}{2}\right)\Bigg|_{(0,1)}^{(2,3)}=4.$$

4261. $\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$.

解 显然,$(x-y)(dx-dy)=d\,\frac{(x-y)^2}{2}$ 是全微分. 于是,
$$\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$$
$$=\int_{(1,-1)}^{(1,1)}d\,\frac{(x-y)^2}{2}$$
$$=\frac{(x-y)^2}{2}\Bigg|_{(1,-1)}^{(1,1)}=-2.$$

4262. $\int_{(0,0)}^{(a,b)}f(x+y)(dx+dy)$,其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 令 $F(x,y)=\int_0^{x+y}f(u)du$. 由于 $f(u)$ 连续,故
$$F'_x(x,y)=f(x+y),F'_y(x,y)=f(x+y),$$
并且它们都是 x、y 的连续函数. 因此,$F(x,y)$ 可微,且
$$dF(x,y)=F'_x(x,y)dx+F'_y(x,y)dy$$

$$= f(x+y)(dx+dy),$$

故 $f(x+y)(dx+dy)$ 是全微分，并且

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x,y)(dx+dy)$$

$$= F(a,b) - F(0,0) = \int_{c}^{a-t} f(u)du.$$

4263. $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

解 显然，当 $x \neq 0$ 时，

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = d\left(-\frac{y}{x}\right)$$

是全微分. 于是，

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$$

$$= \int_{(2,1)}^{(1,2)} d\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x}\bigg|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{3}{2}.$$

4264. $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 沿着不通过坐标原点的路径.

解 显然，当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = d(\sqrt{x^2+y^2})$$

是全微分. 于是，

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \int_{(1,0)}^{(6,8)} d(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\,\Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = 9.$$

4265. $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$，其中 φ 和 ψ 为连续函数.

解 由于φ,ψ是连续函数,故显然有

$$\varphi(x)dx+\psi(y)dy$$

$$=dF(x)+dG(y)=d[F(x)+G(y)],$$

其中 $F(x)=\int_{x_1}^{x}\varphi(u)du, G(y)=\int_{y_1}^{y}\psi(v)dv$. 于是,$\varphi(x)dx+\psi(y)dy$是函数$F(x)+G(y)$的全微分,从而有

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\varphi(x)dx+\psi(y)dy$$

$$=[F(x)+G(y)]\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$

$$=[F(x_2)+G(y_2)]-[F(x_1)+G(y_1)]$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y_2}\psi(v)dv.$$

4266. $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$.

解 $P=x^4+4xy^3, Q=6x^2y^2-5y^4$.

显然,P,Q在全平面上具有连续偏导数,并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2, \frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2.$$

故$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 由于全平面是单连通区域,故在整个平面上表达式$Pdx+Qdy$是某函数$u(x,y)$的全微分,并且线积分$\int_L Pdx+Qdy$与路径无关,因而可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分,得

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

$$=\int_{-2}^{3}(x^4+4x\cdot 0^3)dx+\int_{-1}^{0}[6(-2)^2y^2-5y^4]dy$$

$$=55+7=62.$$

注：也可利用简单的技巧求出函数 $u(x,y)$ 来. 我们有

$$(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

$$=d\left(\frac{x^5}{5}\right)+2y^3d(x^2)+2x^2d(y^3)-d(y^5)$$

$$=d\left(\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5\right),$$

从而

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5\right)\Bigg|_{(-2,-1)}^{(3,0)}=62.$$

4267. $\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ 沿着不与直线 $y=x$ 相交的路径.

解 $P=-\dfrac{y}{(x-y)^2}$，$Q=\dfrac{x}{(x-y)^2}$ $(x\neq y)$.

容易验证

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}\quad(x\neq y).$$

考虑平面上的区域 $\Omega=\{(x,y)|x>y\}$. 由于 Ω 是单连通区域且在其上 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，故在 Ω 上，$Pdx+Qdy$ 是某函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，从而在 Ω 上线积分 $\int_c Pdx+Qdy$ 与路径无关. 因此，可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分，得

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{-(-1)dx}{(x+1)^2}+\int_{-1}^0\frac{dy}{(1-y)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

注：也可利用简单的技巧求出函数 $u(x,y)$ 来. 我们有

$$\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}=\frac{(x-y)dy-yd(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$=d\left(\frac{y}{x-y}\right),$$

从而

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}=\frac{y}{x-y}\Bigg|_{(0,-1)}^{(1,0)}=1.$$

4268. $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

解 当 $x\neq 0$ 时，有

$$P=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x},Q=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

$$=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}.$$

考虑右半平面 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x>0.\}$ 由于 Ω 是单连通区域，且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故在 Ω 上必是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，且可取

$$u(x,y)=\int_1^x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx$$

$$+\int_\pi^y(\sin y+y\cos y)dy$$

$$=\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)\Bigg|_1^x+y\sin y\Bigg|_\pi^y$$

$$= x - 1 + y\sin\frac{y}{x}.$$

于是,

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx$$

$$+\left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

$$= \left(x - 1 + y\sin\frac{y}{x}\right)\Big|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} = \pi + 1.$$

4269. $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y dx - \sin y dy)$.

解 显然,有

$e^x(\cos y dx - \sin y dy) = d(e^x \cos y)$,

于是,

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y dx - \sin y dy)$$

$$= \int_{(0,0)}^{(a,b)} d(e^x \cos y) = (e^x \cos y)\Big|_{(0,0)}^{(a,b)}$$

$$= e^a \cos b - 1.$$

4270. 证明:若 $f(u)$ 为连续函数且 C 为逐段光滑的封闭围线,则

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0.$$

证 令 $F(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2} f(u)du$. 由于 $f(u)$ 是连续函数,故

$$F'_x(x,y) = xf(x^2 + y^2),$$

$$F'_y(x,y) = yf(x^2 + y^2),$$

并且显然 $F'_x(x,y)$,$F'_y(x,y)$ 都是 x,y 的连续函数. 因此,$F(x,y)$ 可微,且

$$dF(x,y) = F'_x(x,y)dx + F'_y(x,y)dy$$
$$= f(x^2 + y^2)(xdx + ydy).$$

于是，任取 C 上一点 (x_0, y_0)，有

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$$
$$= F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)}$$
$$= F(x_0,y_0) - F(x_0,y_0) = 0.$$

证毕.

求原函数 z，设

4271. $dz = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$

解 $$z = \int_0^x (x^2 + 2xy - y^2)dx + \int_0^y (0 - 0 - y^2)dy + C$$
$$= \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C.$$

4272. $dz = \dfrac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$

解 $$z = \int_0^x \frac{ydx}{3x^2 - 2xy + 3y^2} + \int_1^y 0dy + C$$
$$= \frac{y}{3}\int_0^x \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{8y^2}{9}} + C$$
$$= \frac{y}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}\,y}\operatorname{arctg}\frac{3\left(x - \frac{y}{3}\right)}{2\sqrt{2}\,y}\Bigg|_0^x + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x - y}{2\sqrt{2}\,y} + C_1.$$

4273. $dz = \dfrac{(x^2 + 2xy + 5y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy}{(x + y)^3}$

解 $$z=\int_0^x \frac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^3}dx+\int_1^y \frac{0-0+y^2}{(0+y)^3}dy+C$$
$$=\int_0^x \frac{(x+y)^2+4y^2}{(x+y)^3}dx+\int_1^y \frac{dy}{y}+C$$
$$=[\ln|x+y|]\Big|_0^x-\frac{2y^2}{(x+y)^2}\Big|_0^x+[\ln|y|]\Big|_1^y+C$$
$$=\ln|x+y|-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+C_1.$$

4274. $dz=e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy.$

解 $$z=\int_0^x[(x-y+2)e^{x+y}+ye^x]dx+\int_0^y(1-ye^y)dy+C$$
$$=[(x-y+1)e^{x+y}+ye^x]\big|_0^x+[y-ye^y+e^y]\big|_0^y+C$$
$$=(x-y+1)e^{x+y}+ye^x+C_1.$$

4275. $dz=\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx+\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}dy.$

解 因为
$$dz=\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx+\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}dy$$
$$=d\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right)$$
故有
$$z=\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}+C.$$

4276. $dz = \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dx$

$-\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dy$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

解　易知（当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时）

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{x}{r^2},\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^2-2x^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^2-2y^2}{r^4},$$

故（当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时）

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=0. \tag{1}$$

令

$$P=\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right),$$

$$Q=-\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right),$$

则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，由(1)式知

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]=0.$$

因此，在任何不含原点 $(0,0)$ 的单连通区域中，$Pdx+Qdy$ 都是某函数 z 的全微分，并且对上半平面的点 (x,y)（即 $y>0$），可取

$$z(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_1^y Q(0,y)dy+C$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^x \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dx \\
&\quad - \int_1^y \left[\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0} dy + C \\
&= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right) \\
&\quad - \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0} \\
&\quad - \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{\substack{x=0\\y=1}} + C \\
&= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{r}\right) \\
&\quad - \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right. \\
&\quad \left.+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0} + C_1 \\
&= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(-\frac{x}{r^2}\right) + C_1 \\
&= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) + C_1 \\
&= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) + C_1,
\end{aligned}
$$

其中 $C_1 = \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} + C$ 是任意常数.

同理,对下半平面的点(x,y)(即 $y < 0$),可取

$$z(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + \int_{-1}^y Q(0,y)dy + C.$$

经过和前面完全类似的计算,可得

$$z(x,y)=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)+C_2,$$

其中

$$C_2=\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{\substack{x=0\\y=-1}}+C$$

也是任意常数.

4277. 证明下面的估计对于曲线积分是正确的:

$$\left|\int_c Pdx+Qdy\right|\leqslant LM,$$

式中 L 为积分路径的长及 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$(在弧 C 上).

证 由于

$$\left|\int_c Pdx+Qdy\right|$$
$$=\left|\int_c(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds\right|$$
$$\leqslant\int_c|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|ds,$$

又因

$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2$$
$$=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$0\leqslant(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2$$
$$=P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha-2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$

故有 $(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2$. 从而

$|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M$.

于是,

$$\left|\int_c Pdx+Qdy\right|\leqslant M\int_c ds=LM.$$

4278. 估计积分

$$I_R = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

证明$\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

解 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上,有

$$\begin{aligned}
P^2+Q^2 &= \frac{y^2}{(x^2+xy+y^2)^4} \\
&\quad + \frac{x^2}{(x^2+xy+y^2)^4} \\
&= \frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4} \\
&= \frac{R^2}{(R^2+xy)^4} \leqslant \frac{R^2}{(R^2-|xy|)^4} \\
&\leqslant \frac{R^2}{\left(R^2-\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^4} \\
&= \frac{16}{R^6}.
\end{aligned}$$

于是,$M\leqslant\frac{4}{R^3}$. 利用 4277 题的结果,即得 I_R 的估计式:

$$|I_R| \leqslant \frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R = \frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可知:$\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

计算沿空间曲线所取的线积分(假定坐标系是右手的):

4279. $\int_C (y^2-z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$,式中$C$为依参数增加的方向进行的曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3 (0\leqslant t\leqslant 1)$.

解 $\int_C (y^2-z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$

$$= \int_0^1 [(t^4-t^6) + 2t^5\cdot 2t - t^2\cdot 3t^2]dt$$

$$= \int_0^1 (3t^6-2t^4)dt = \frac{1}{35}.$$

4280. $\int_C ydx + zdy - xdz$，式中 C 为依参数增加方向进行的纽形螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

解 $\int_C ydx + zdy + xdz$

$$= \int_0^{2\pi} (-a^2\sin t\sin t + abt\cos t + ab\cos t)dt$$

$$= \Big(-\frac{at^2}{2} + \frac{a^2\sin 2t}{4} + abt\sin t + ab\cos t + ab\sin t\Big)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \quad \pi a^2.$$

4281. $\int_C (y-z)dx - (z-x)dy + (x-y)dz$，式中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x\mathrm{tg}\alpha (0 < \alpha < \pi)$，若从 Ox 轴的正向看去，这圆周是沿逆时针方向进行的.

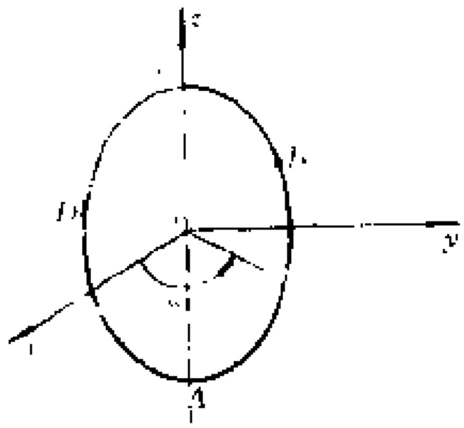

图 8.63

解 如图 8.63 所示. 利于球面的参数方程 $x = a\cos\varphi\cos\psi, y = a\sin\varphi\cos\psi, z = a\sin\psi$. 在 $\widehat{ABC}$ 上，$\varphi = \alpha$，因而有

$x = a\cos\alpha\cos\psi, dx = -a\cos\alpha\sin\psi d\psi,$

$y = a\sin\alpha\cos\psi, dy = -a\sin\alpha\sin\psi d\psi,$

$z = a\sin\psi, dz = a\cos\psi d\psi,$

且

$$\int_{\widehat{ABC}}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-(\sin\alpha\cos\psi-\sin\psi)\cos\alpha\sin\psi$$

$$-(\sin\psi-\cos\alpha\cos\psi)\sin\alpha\sin\psi$$

$$+(\cos\alpha\cos\psi-\sin\alpha\cos\psi)\cos\psi]d\psi$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha-\sin\alpha)d\psi=\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

$$=\sqrt{2}a^2\pi\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

在$\widehat{CDA}$上,$\varphi=\alpha+\pi$,同样可得

$$\int_{\widehat{CDA}}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=-a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha-\cos\alpha)d\psi$$

$$=\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

于是,最后得

$$\int_{C}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

4282. $\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$,式中C为维维安尼曲线$x^2+y^2+z^2=a^2$,$x^2+y^2=ax(z\geqslant 0,a>0)$,若从$Ox$轴的正的部分$(x>a)$看去,此曲线是沿逆时针方向进行的.

解 柱面$x^2+y^2=ax$可变为

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

故若令 $x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t, y=\frac{a}{2}\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则

$$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$
$$=\sqrt{a^2-\left[\frac{a^2(1+\cos t)^2}{4}+\frac{a^2\sin^2 t}{4}\right]}$$
$$=a\sin\frac{t}{2}.$$

从而，曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+\cos t)}{2}, y=\frac{a\sin t}{2},$$
$$z=a\sin\frac{t}{2}\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

于是，

$$\int y^2dx+z^2dy+x^2dz$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{a^3\sin^3 t}{8}+\frac{a^3\sin^2\frac{t}{2}\cos t}{2}+\frac{a^3\cos^5\frac{t}{2}}{2}\right]dt$$
$$=-\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{8}(1-\cos^2 t)d(\cos t)$$
$$+\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos t}{2}\cos t dt$$
$$+a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)d\left(\sin\frac{t}{2}\right)$$
$$=\frac{a^3}{8}\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$+\frac{a^3}{4}\left[\sin t-\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$+ a^3\left(\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$= -\frac{\pi a^3}{4}.$$

4283. $\int_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$，式中$C$为球面的一部分$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0$的围线，当沿着它的正向进行时该曲面的外面保持在左方.

解 围线在Oxy平面部分的方程为

$$x = \cos\varphi, y = \sin\varphi, z = 0 \quad \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

根据轮换对称性知，只要沿这部分计算线积分，再三倍之，便得要求的结果，即

$$\int_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2\varphi \cdot (-\sin\varphi) - \cos^2\varphi \cdot \cos\varphi]d\varphi$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\varphi)d(\cos\varphi)$$
$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi)d(\sin\varphi)$$
$$= 3\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi - \sin\varphi + \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -4.$$

利用全微分计算下列曲线积分：

4284. $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2dy - z^3dz.$

解 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2dy - z^3dz$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4\right)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}$$

$$= -53\frac{7}{12}.$$

4285. $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + xzdy + xydz.$

解 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + xzdy + xydz$

$$= xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} = 0.$$

4286. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中点$(x_1,y_1,z_1)$位于球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之上，而点(x_2,y_2,z_2)位于球 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 之上$(a>0,b>0)$.

解 由题设知：

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=a^2, x_2^2+y_2^2+z_2^2=b^2.$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$= \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} - \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

$$= b - a.$$

4287. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy + \chi(z)dz$，式中 φ,ψ,χ 为连续函数.

解 因为

$$\varphi(x)dx + \psi(y)dy + \chi(z)dz$$

$$= d\left(\int_{x_1}^{x}\varphi(u)du + \int_{y_1}^{y}\psi(v)dv + \int_{z_1}^{z}\chi(\omega)d\omega\right),$$

故有

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy + \chi(z)dz$$

$$= \left[\int_{x_1}^{x} \varphi(u)du + \int_{y_1}^{y} \psi(v)dv + \int_{z_1}^{z} \chi(\omega)d\omega\right]\Bigg|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(u)du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v)dv + \int_{z_1}^{z_2} \chi(\omega)d\omega.$$

4288. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$，其中 f 为连续函数.

解 令 $F(x,y,z) = \int_0^{x+y+z} f(u)du$. 由于 $f(u)$ 是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z) = f(x+y+z),$$

$$F'_y(x,y,z) = f(x+y+z),$$

$$F'_z(x,y,z) = f(x+y+z),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此，$F(x,y,z)$ 可微，且

$$dF(x,y,z)$$

$$= F'x(x,y,z)dx + F'y(x,y,z)dy + F'z(x,y,z)dz$$

$$= f(x+y+z)(dx+dy+dz).$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$$

$$= F(x,y,z)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$= F(x_2,y_2,z_2) - F(x_1,y_1,z_1)$$

$$=\int_{0}^{x_2+y_2+z_2}f(u)du-\int_{0}^{x_1+y_1+z_1}f(u)du$$

$$=\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2}f(u)du.$$

4289. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})xdx+ydy+zdz)$，式中 f 为连续函数.

解 令 $F(x,y,z)=\frac{1}{2}\int_{0}^{x^2+y^2+z^2}f(\sqrt{v})dv$. 由于 f 是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z)=xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

$$F'_y(x,y,z)=yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

$$F'_z(x,y,z)=zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此，$F(x,y,z)$ 可微，且

$$dF(x,y,z)$$

$$=F'_x(x,y,z)dx+F'_y(x,y,z)dy$$

$$+F'_z(x,y,z)dz$$

$$=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz).$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

$$\cdot(xdx+ydy+zdz)$$

$$=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2}^{x_2^2+y_2^2+z_2^2}f(\sqrt{v})dv^{*)}$$

$$=\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}uf(u)du,$$

*) 这里已作代换 $\sqrt{v}=u(v=u^2,dv=2udu)$. 求原

函数 u，若：

4290. $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$.

解 $du=(x^2dx+y^2dy+z^2dz)$

$$-2(yzdx+xzdy+xydz)$$
$$=d\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-2xyz\right).$$

于是，

$$u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.$$

4291. $du=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}dz$.

解 $du=dx+\left(-\frac{1}{y}dx+\frac{x}{y^2}dy\right)$

$$+\frac{1}{z}(ydx+xdy)-\frac{xy}{z^2}dz$$
$$=dx+\left[-\frac{1}{y}dx+xd\left(-\frac{1}{y}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{z}d(xy)+xyd\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$=dx+d\left(-\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{xy}{z}\right)$$
$$=d\left(x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

于是，$$u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C.$$

4292. $du=\dfrac{(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

解 由于

$$(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz$$
$$=(xdx+ydy)+(ydx+xdy)+(x+y)dz$$
$$-z(dx+dy)+zdz$$

$$= \frac{1}{2} d[(x^2 + y^2 + 2xy) + z^2]$$
$$+ (x + y)dz - zd(x + y),$$

故

$$du = \frac{1}{2} \frac{d[(x + y)^2 + z^2]}{(x + y)^2 + z^2}$$
$$+ \frac{(x + y)dz - zd(x + y)}{(x + y)^2 + z^2}$$
$$= \frac{1}{2} d\ln[(x + y)^2 + z^2]$$
$$+ d\left(\operatorname{arctg} \frac{z}{x + y}\right)$$
$$= d[\ln \sqrt{(x + y)^2 + z^2}$$
$$+ \operatorname{arctg} \frac{z}{x - y}].$$

于是，

$$u = \ln \sqrt{(x + y)^2 + z^2}$$
$$+ \operatorname{arctg} \frac{z}{x + y} + C.$$

4293. 求当质量为 m 的点从位置(x_1, y_1, z_1)移动到位置(x_2, y_2, z_2)时，重力所产生的功(Oz 轴的方向垂直向上).

解 设 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 为各坐标轴上的单位矢量，则重力 $\vec{F} = -mg\vec{k}$，而

$$d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

从而功的微分为

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -mgdz = d(-mgz).$$

于是，重力的功为

$$A = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} -mgdz$$

$$= (-mgz)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$= -mg(z_2 - z_1).$$

4294$^+$. 弹性力的方向向着坐标原点，力的大小与质点距坐标原点的距离成比例. 设此点依反时针方向描绘出椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的正四分之一，求弹性力所作的功.

解 弹性力

$$\vec{F} = -k(x\vec{i} + y\vec{j}),$$

功的微分为

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= -k(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

$$= -k(xdx + ydy)$$

$$= d\left[-\frac{k}{2}(x^2 + y^2)\right].$$

于是，功为

$$A = -k\int_{(a,0)}^{(0,b)} xdx + ydy$$

$$= -\frac{k}{2}(x^2 + y^2)\Big|_{(a,0)}^{(0,b)}$$

$$= \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

4295$^+$. 当单位质量从点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 移动到点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 时，求作用于单位质量的引力 $F = \frac{k}{r^2}$（其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$）所做的功.

解 引力指向坐标原点，故它的方向余弦为

$$\cos\alpha = -\frac{x}{r} \qquad \cos\beta = -\frac{y}{r},$$

$$\cos\gamma = -\frac{z}{r},$$

而引力的射影为

$$X = -\frac{kx}{r^3}, Y = -\frac{ky}{r^3},$$

$$Z = -\frac{kz}{r^3}.$$

于是，功为

$$\begin{aligned} A &= -k\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} \\ &= -\frac{k}{2}\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\Bigg|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \\ &= k\left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}\right). \end{aligned}$$

当然，这里假设从 M_1 点到 M_2 点的路径是不经过原点的，上式表明功与路径无关，仅决定于起始点的坐标.

§12. 格 林 公 式

1° 曲线积分与二重积分的关系　设 C 为逐段光滑的简单封闭围线，它围成单联通的有界域 S，这围线的方向是这样的：域 S 保持在左边，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 与它们自己的一阶偏导函数在域 S 内及其边缘上皆是连续的，则有格林公式

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \tag{1}$$

若把域 S 的边界 C 了解为一切边界围线的和，而围线绕转的方向是选择来使得域 S 保持在左边，则公式(1)对于由几个简单围线所界的有界域 S 也真确。

2° 平面域的面积　由逐段光滑的简单围线 C 所界的面积 S 等于：

$$S=\frac{1}{2}\oint_{C} xdy-ydx.$$

在这一节中，若没有相反的约定，则假定积分的封闭围线是简单的（无自交点），并选择它们的正方向使所界不含无穷远点的域是保持在曲线的左边。

4296. 利用格林公式变换曲线积分

$$I=\oint_{C}\sqrt{x^2+y^2}dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy,$$

式中围线 C 包含有界的域 S.

解　此处 $P=\sqrt{x^2+y^2}$，$Q=xy^2+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$. 从而

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=y^2.$$

于是，

$$I=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_S y^2dxdy.$$

注：这里应假定 C 不与 Ox 轴的左半部分（即 $x\leqslant 0$，$y=0$）相交，从而这时在 S 中 $x+\sqrt{x^2+y^2}>0$.

4297. 应用格林公式，计算曲线积分

$$I=\oint_{K}(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy.$$

其中 k 依正方向经过以 $A(1,1),B(3,2),C(2,5)$ 为顶点的三角形 ABC 的围线. 直接计算积分，以验证所求得的结果.

解　如图 8.64 所示. AB、BC 及 CA 的方程分别为 $y=\frac{1}{2}(x+1)$，$y=-3x+11$，$y=4x-3$.

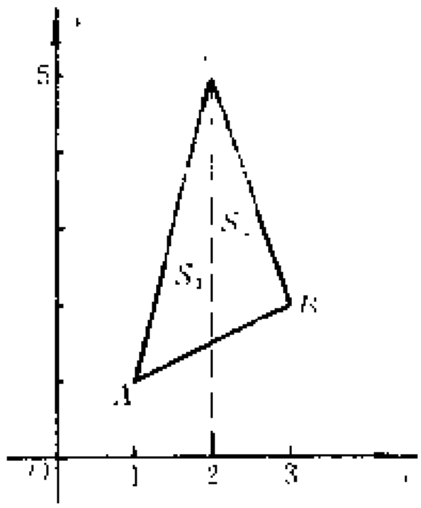

图　8.64

由于 $P=(x+y)^2$，$Q=-(x^2+y^2)$，故

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2\cdot(x+y)=-4x-2y.$$

通过顶点 C 引直线垂直于 Ox 轴，它把三角形域 S 分成 S_1 和 S_2 两部分. 于是，

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{S}(-4x-2y)dxdy\\
&=\iint\limits_{S_1}(-4x-2y)dxdy+\iint\limits_{S_2}(-4x-2y)dxdy\\
&=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(-4x-2y)dy\\
&\quad+\int_2^3 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11}(-4x-2y)dy\\
&=\int_1^2\left(-\frac{119}{4}x^2+\frac{77}{2}x-\frac{35}{4}\right)dx
\end{aligned}$$

$$+\int_2^3\left(\frac{21}{4}x^2+\frac{49}{2}x-\frac{483}{4}\right)dx$$

$$=-\frac{245}{12}-\frac{105}{4}=-46\frac{2}{3}.$$

如果直接计算，则

$$I=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}$$

$$=\int_1^3\left[\left(x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]dx$$

$$+\int_3^2[(x-3x+11)^2-(-3)(x^2+9x^2-66x+121)]dx$$

$$+\int_2^1[(x+4x-3)^2-4(x^2+16x^2-24x+9)]dx$$

$$=\int_1^3\left(\frac{13}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{1}{8}\right)dx$$

$$+\int_3^2(34x^2-242x+484)dx$$

$$+\int_2^1(-43x^2+66x-27)dx$$

$$=\frac{58}{3}-\frac{283}{3}+\frac{5}{3}=-46\frac{2}{3}.$$

应用格林公式计算下列曲线积分：

4298. $\oint_C xy^2dy-x^2ydx$，式中 C 为圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解 由于 $P=-x^2y, Q=xy^2$，故有

$$\oint_C xy^2dy-x^2ydx=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3dr=\frac{\pi a^4}{2}.$$

如果直接计算，可令 $x=a\cos t, y=a\sin t$，则

$$\oint_C xy^2dy - x^2ydx = a^4\int_0^{2\pi}(\cos^2t\sin^2t$$

$$+ \cos^2t\sin^2t)dt$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt = \frac{\pi a^4}{2}.$$

4299. $\oint_C(x+y)dy-(x-y)dy$，式中 C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 由于 $P=x+y, Q=-(x-y)$，故有

$$\oint_C(x+y)dx-(x-y)dy$$

$$=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1}(-1-1)dxdy=-2\pi ab.$$

如果直接计算，则

$$\oint_C(x+y)dy-(x-y)dy$$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-b\sin t)$$

$$\cdot(b\cos t)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}[(b^2-a^2)\cos t\sin t-ab]dt=-2\pi ab.$$

4300. $\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$，其中 C 为域 $0<x<\pi, 0<y<\sin x$ 的正方向的围线.

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x(\sin y-y)-e^x\sin y=-ye^x,$$

故有

$$\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$$

$$= -\iint\limits_{\substack{0\le x\le\pi \\ 0\le y\le\sin x}} ye^x dxdy = -\int_0^\pi e^x dx\int_0^{\sin x} ydy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\sin^2 xdx$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\int_0^\pi e^x dx - \int_0^\pi e^x\cos 2xdx\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(e^\pi - 1) - \frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5}e^x\Big|_0^\pi\right]$$

$$= -\frac{1}{5}(e^\pi - 1).$$

4301. $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xydx + \sin 2xydy)$.

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-(x^2-y^2)}[(-2x\sin 2xy + 2y\cos 2xy)$$
$$-(2y\cos 2xy - 2x\sin 2xy)] = 0,$$

故有

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xydx + \sin 2xydy)$$
$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} 0dxdy = 0.$$

4302. 积分

$$I_1 = \int_{AmB}(x+y)^2dx - (x-y)^2dy$$

和

$$I_2 = \int_{AnB}(x+y)^2dx - (x-y)^2dy$$

(其中 AmB 为连接点 $A(1,1)$ 和点 $B(2,6)$ 的直线，AnB 是其轴为垂直的抛物线，并通过 A、B 及坐标原点）相差多少？

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2(x-y)-2(x+y)=-4x,$$

故 I_1 与 I_2 之差为(利用格林公式)

$$\begin{aligned}I_2-I_1&=\oint_{AnBmA}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy\\&=\iint_S(-4x)dxdy=\int_1^2dx\int_{2x^2}^{3x-2}(-4x)dy\\&=-\int_1^2 4x(-2x^2+6x-4)dx\\&=(2x^4-8x^3+8x^2)\Big|_1^2=-2,\end{aligned}$$

或 $I_1-I_2=2$.

4303. 计算曲线积分

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy,$$

其中 AmO 为由点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$.

解 在 Ox 轴上连接点 $O(0,0)$ 与点 $A(a,0)$,这样,便构成封闭的半圆形 $AmOA$,且在线段 OA 上,

$$\int_{OA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=0.$$

从而

$$\oint_{AmOA}=\int_{AmO}+\int_{OA}=\int_{AmO}.$$

另一方面,利用格林公式可得

$$\begin{aligned}&\oint_{AmOA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy\\&=\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}mdxdy=\frac{\pi ma^2}{8}.\end{aligned}$$

于是，

$$\int_{AmO}(e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$$

$$=\frac{\pi m a^2}{8}.$$

4304. 计算曲线积分

$$\int_{AmB}[\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy,$$

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数，AmB 为连接点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 的任何路径，但与线段 AB 围成已知大小为 S 的面积 $AmBA$.

解 首先，我们有

$$\oint_{AmBA}=\int_{AmB}+\int_{BA}.$$

而

$$\oint_{AmBA}[\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy$$

$$=\iint_S m\,dx\,dy = mS.$$

另一方面，

$$\int_{BA}[\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy$$

$$=\int_{BA}d[e^x\varphi(y)] - \int_{BA}m(y\,dx + dy)$$

$$=e^x\varphi(y)\Big|_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)} - m\int_{x_2}^{x_1}\Big[y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\cdot(x - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\Big]dx$$

$$=e^{x_1}\varphi(y_1) - e^{x_2}\varphi(y_2) - m\Big(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\Big)$$

$$\cdot (x_1 - x_2) + \frac{m}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1)^2$$

$$= e^{x_1}\varphi(y_1) - e^{x_2}\varphi(y_2) + m(y_2 - y_1)$$

$$- \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1).$$

于是，

$$\int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy$$

$$= mS + e^{x_2}\varphi(y_2) - e^{x_1}\varphi(y_1) - m(y_2 - y_1)$$

$$\frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1).$$

注：利用此题的结果可计算 4303 题. 事实上，由于 $\varphi(y) = \sin y, x_1 = a, y_1 = 0, x_2 = y_2 = 0, S = \frac{\pi a^2}{8}$，代入即得

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

4305. 求两个二次连续地可微分的函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$，使得线积分

$$I = \oint_C P(x+\alpha, y+\beta)dx + Q(x+\alpha, y+\beta)dy$$

对于任何封闭的围线 C 与常数 α 和 β 无关.

解 由格林公式，得

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial x} - \frac{\partial P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial y} \right)$$

$$\cdot dxdy = \tau. \tag{1}$$

由假定 τ 为一常数，它与 α、β 无关(只与围线 C 有关)，上式中的 S 表围线 C 所围成的闭区域. 由假定 P,Q 具有连续的二阶偏导数，故(1) 式中二重积分的被积函数具有关于 α, β 的一阶连续偏导数. 因此，可以在积分

号下关于α,β求偏导数，得

$$\iint_S \left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial y}\right]$$

$$\cdot dxdy = \frac{\partial}{\partial\alpha}\tau = 0. \qquad (2)$$

$$\iint_S \left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial y}\right]$$

$$\cdot dxdy = \frac{\partial}{\partial\beta}\tau = 0. \qquad (3)$$

于是，(2)式和(3)式对任何α,β以及任何S都成立．再注意到(2)式和(3)式中二重积分的被积函数都是连续的，故被积函数必恒为零(参看4097题，此题对二重积分也成立)：

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial y} \equiv 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial y} \equiv 0 \qquad (5)$$

(对任何x,y,α,β)．记$x+\alpha=u,y+\beta=v$，显然有

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial x} = \frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\alpha\partial y} = \frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial x} = \frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial v\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial\beta\partial y} = \frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v^2}.$$

于是，(4)式与(5)式为

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u \partial v} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v^2} \equiv 0$$

(对任何 u,v).由此可知:

$$\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u,v)}{\partial v} \equiv k(\text{常数}).$$

将 u,v 改记为 x,y,则上式为

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = k(\text{常数}). \tag{6}$$

令 $u(x,y) = \int_0^x P(t,y)dt$.则 $u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数,且

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y). \tag{7}$$

由(6)式知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= k + \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \\ &= k + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) \\ &= k + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

两端积分,得

$$Q(x,y) = kx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \varphi(y), \tag{8}$$

其中 $\varphi(y)$ 为具有二阶连续导数的任意函数.由(7),(8)两式又知 $u(x,y)$ 具有连续的三阶偏导数.

反之,若 $u(x,y)$ 是任一具有三阶连续偏导数的函数,而 $\varphi(y)$ 是任一具二阶连续导数的函数,则由(7)

式和(8)式确定的$P(x,y)$与$Q(x,y)$必具连续二阶偏导数，且使(6)式成立，从而使

$$I=\oint_C P(x+\alpha,y+\beta)dx+Q(x+\alpha,y+\beta)dy$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial Q(x+\alpha,y+\beta)}{\partial x}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial P(x+\alpha,y+\beta)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=\iint_S kdxdy=kS,$$

故I是与α、β无关的常数(对于任意固定的C).

综上所述，可知：使线积分I对于任何封闭围线C与常数α、β无关的二阶连续地可微的函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$的全体由公式(7)与(8)给出，其中k为常数，$u(x,y)$为三阶连续地可微的任一函数，$\varphi(y)$为二阶连续地可微的任意一个一元函数.

4306. 为了使线积分

$$\int_{AmB}F(x,y)(ydx+xdy)$$

与积分路径的形状无关，则可微分函数$F(x,y)$应满足怎样的条件？

解 由于$P=yF(x,y)$，$Q=xF(x,y)$，故由格林公式知所求的条件为

$$\frac{\partial}{\partial x}[xF(x,y)]=\frac{\partial}{\partial y}[yF(x,y)],$$

即

$$xF_x'(x,y)=yF_y'(x,y).$$

4307. 计算

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

其中 C 为依正方向进行而不经过坐标原点的简单封闭围线.

解 令 $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$. 易知，当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

今分两种情况讨论：

(1) 坐标原点在围线 C 之外，这时，在由 C 围成的有界闭区域 S 上，P 与 Q 以及它们的偏导数都连续，故可应用格林公式，得

$$I = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

(2) 围线 C 包围坐标原点. 这时，由于 P,Q 在原点无定义，故不能直接对由 C 围成的区域应用格林公式. 今取 $a > 0$ 充分小，使中心在原点半径为 a 的圆周 $L_a(L_a: x^2 + y^2 = a^2)$ 完全位于围线 C 之内. 用 Sa 表界于 C 和 L_a 之间的环形闭区域. 显然，在 Sa 上，P、Q 及其偏导数均连续，故可应用格林公式，得

$$\left(\oint_C + \oint_{-L_a} \right) Pdx + Qdy = \iint_{Sa} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

其中 $-L_a$ 表沿 La 的负方向(即顺时针方向).

于是，

$$I = \oint_C Pdx + Qdy = \oint_{L_a} Pdx + Qdy,$$

其中 L_a 沿正方向(即逆时针方向). 利用 L_a 的参数方程 $x = a\cos t, y = a\sin t(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$,即得

$$I = \oint_{L_a} Pdx + Qdy = \oint_{L_a} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(a\cos t) - a\sin t(-a\sin t)]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

利用曲线积分计算由下列曲线所界的面积:

4308. 椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

解　面积为

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \pi ab.$$

4309. 星形线 $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

解　面积为

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

$$= \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t)dt$$

$$= \frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi} \sin^2 2tdt = \frac{3}{8}\pi ab.$$

4310. 抛物线 $(x + y)^2 = ax(a > 0)$ 和轴 Ox.

解　作代换 $y = tx$,则原方程化为 $x^2(1 + t)^2 = ax$. 从而得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a}{(1 + t)^2}, y = \frac{at}{(1 + t)^2}(0 \leqslant t < +\infty).$$

它与 Ox 轴的交点为 $(a,0)$ 与 $(0,0)$。在 Ox 轴上从点 $(0,0)$ 到点 $(a,0)$ 的一段上,有

$$xdy - ydx = 0.$$

在抛物线上，有

$$xdy - ydx = \frac{a^2}{(1+t)^4}dt.$$

于是，面积为

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^4}$$

$$= -\frac{a^2}{6}\cdot\frac{1}{(1+t)^3}\Big|_0^{+\infty} = \frac{a^2}{6}.$$

4311. 笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy(a > 0)$.

解 作代换 $y = tx$，则得曲线的参数方程为

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$dx = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt, dy = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}dt,$$

从而

$$xdy - ydx = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt.$$

于是，面积为

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(-\frac{1}{1+t^3}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}.$$

4312. 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

解 利用极坐标 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$，得双纽线的方程为 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$，故

$$x = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}, y = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

从而 $xdy - ydx = a^2\cos 2\varphi d\varphi$. 于是，面积为

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\oint_{C}xdy-ydx$$
$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}a^{2}\cos2\varphi d\varphi=a^{2}.$$

4313. 曲线 $x^3+y^3=x^2+y^2$ 及坐标轴.

解 作代换 $y=tx$,即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{1+t^{2}}{1+t^{3}},y=\frac{t(1+t^{2})}{1+t^{3}}(0\leqslant t<+\infty).$$

曲线的起点为(1,0),终点为(0,1).在曲线上,

$$xdy-ydx=\frac{(1+t^{2})^{2}}{(1+t^{3})^{2}}dt(0\leqslant t<+\infty).$$

在 Oy 轴上从点(0,1)到点(0,0)一段,以及在 Ox 轴上从点(0,0)到点(1,0)一段上,均有

$$xdy-ydx=0.$$

于是,面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{(1+t^{2})^{2}}{(1+t^{3})^{2}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\int_{0}^{+\infty}\frac{t^{4}}{(1+t^{3})^{2}}dt+2\int_{0}^{+\infty}\frac{t^{2}}{(1+t^{3})^{2}}dt$$
$$+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+t^{3})^{2}}dt\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}B\left(2-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}B(1,1)$$
$$+\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},2-\frac{1}{3}\right)\Big]^{*)}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(2-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

*） 利用 3853 题的结果.

4314. 计算由曲线

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m (a>0, n>0, m>0)$$

所界的面积.

解 作代换 $y = tx$，即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}}, y = \frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}} (0 \leqslant t < +\infty).$$

从而

$$xdy - ydx = \frac{a^2 t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} dt (0 \leqslant t < +\infty)$$

于是，面积为

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} dt$$

$$= \frac{a^2}{2} B(2m+1, 2n+1).^{*)}$$

*） 利用 3852 题的结果.

4315. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a>0, b>0, n>0)$$

和坐标轴所界的面积.

解 作代换 $x = a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi, y = b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi (0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2})$，

即得

$$xdy - ydx = \frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi.$$

曲线与坐标轴交于点$(a,0)$ 和点$(0,b)$. 在 Oy 轴上，从点$(0,b)$ 到点$(0,0)$ 一段，以及在 Ox 轴上从点$(0,0)$ 到

点$(a,0)$一段上，显然有

$$xdy-ydx=0.$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{ab}{n}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)^{*)}=\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

*） 利用3856题的结果.

4316. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a>0,b>0,n>0)$和坐标轴所界的面积.

解 作代换$y=\frac{b}{a}t$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n},y=\frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n}(0<t<+\infty).$$

易知

$$xdy-ydx=ab\frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2}dt.$$

又在两坐标轴上，显然有$xdy-ydx=0$. 于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{ab}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2}dt$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n-2}}{(1+t^n)^2}dt+2\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(1+t^n)^2}dt\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^n)^2}dt\right]$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\frac{1}{n}B\left(2-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}B(1,1)+\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)\right]^{*)}$$

$$=\frac{ab}{n}\left[1+B\left(2-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{ab}{n}\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)}\right]$$

$$=\frac{ab}{n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right].$$

*) 利用 3853 题的结果.

4317. 计算由纽形曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^{n}\left(\frac{y}{b}\right)^{n}$$

($a>0,b>0,c>0,n>0$) 所界的面积.

解 作代换 $y=\frac{b}{a}xt$,即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{act^n}{1+t^{2n+1}},\; y=\frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

易知

$$xdy-ydx=\frac{abc^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}dt.$$

于是,面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{abc^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}dt$$

$$=-\frac{abc^2}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{1+t^{2n+1}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{abc^2}{2(2n+1)}.$$

4318. 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆外面圆周滚动(而不滑动)时,由动圆上的一点所描绘出来的曲线称

为外摆线. 假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数($n \geqslant 1$),求外摆线所界的面积. 研究特殊情况 $r = R$(心脏形线).

解 取定圆的中心 O 作坐标原点,取 Ox 轴通过点 A,点 A 是动点的始点,即为两圆的公切点时的位置(图 8.65). 当动圆滚到如图的新位置时,点 A 移到点 M. 动点 M 的轨迹便是外摆线,其方程推导如下:设动圆的圆心为 C,两圆的切点为 B,记 $\angle MCB = t$(运动开始时,设 t 等于零). 切点在定圆上所移过的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 应等于它在动圆上所移过的弧 $\overset{\frown}{MB}$,即

$$R \cdot \angle AOB = \frac{R}{n} \cdot \angle MCB = \frac{R}{n} t.$$

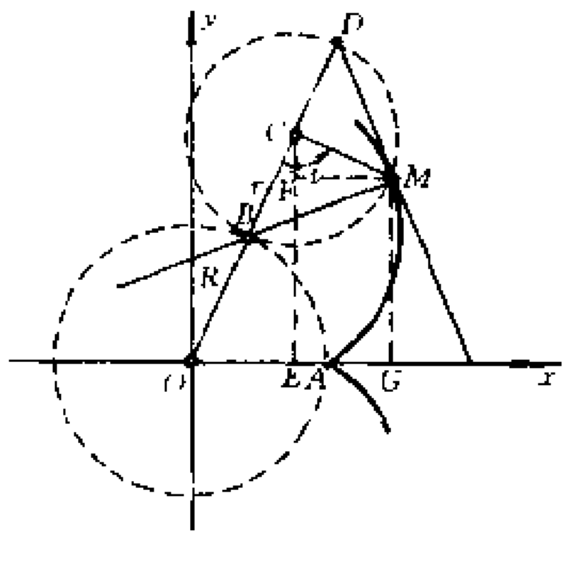

图 8.65

从而 $\angle AOB = \frac{t}{n}$,设动点 M 的坐标为 (x, y),则

$$x = OG = OE + FM$$
$$= \left(R + \frac{R}{n}\right)\cos\frac{t}{n} + \frac{R}{n}\sin\angle FCM,$$

但 $\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE$，且 $\angle OCE = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{n}$，从而

$$\angle FCM = \left(1 + \frac{1}{n}\right)t - \frac{\pi}{2},$$
$$\sin\angle FCM = -\cos\left(1 + \frac{1}{n}\right)t.$$

于是，最后得

$$x = R\left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos\frac{t}{n} - \frac{R}{n}\cos\left(1 + \frac{1}{n}\right)t.$$

类似地，可求得

$$y = R\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{t}{n} - \frac{R}{n}\sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)t.$$

若记 $\varphi = \dfrac{t}{n}$，并注意到 $R = nr$，则外摆线可用如下的参数方程表示：

$$x = (n+1)r\cos\varphi - r\cos(n+1)\varphi,$$
$$y = (n+1)r\sin\varphi - r\sin(n+1)\varphi.$$

由 $R = nr$ 知，当动圆滚 n 圈后，起点与终点重合，即 φ 的变化范围为 $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. 由于

$$xdy - ydx = r^2(n+1)(n+2)(1 - \cos n\varphi)d\varphi,$$

故所求的面积为

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$
$$= \frac{r^2(n+1)(n+2)}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos n\varphi)d\varphi$$
$$= \pi r^2(n+1)(n+2).$$

特别是，当 $r = R$ 时，即 $n = 1$，则得心脏形线的面积为 $S = 6\pi r^2$.

4319. 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆内面圆周滚动（而不滑动）时，由动圆上的一点所描绘出来的曲线称为内摆线. 假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数（$n \geqslant 2$），求内摆线所界的面积. 研究特殊情况 $r = \frac{R}{4}$（星形线）.

解 仿上题，容易求得内摆线的参数方程为

$$x = R\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cos\frac{t}{n} + \frac{R}{n}\cos\left(1 - \frac{1}{n}\right)t,$$

$$y = R\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sin\frac{t}{n} - \frac{R}{n}\sin\left(1 - \frac{1}{n}\right)t$$

若以 $\varphi = \frac{t}{n}$ 为参数，并注意到 $R = nr$，则得

$$x = r(n-1)\cos\varphi + r\cos(n-1)\varphi,$$

$$y = r(n-1)\sin\varphi - r\sin(n-1)\varphi.$$

由于

$$xdy - ydx = r^2(n-1)(n-2)(1 - \cos n\varphi)d\varphi,$$

故面积为

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

$$= \frac{r^2(n-1)(n-2)}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos n\varphi)d\varphi$$

$$= \pi r^2(n-1)(n-2).$$

特别是，当 $\frac{R}{r} = 4$ 时，即 $n = 4$，则得星形线所界的面积为 $S = 6\pi r^2$.

4320. 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 被曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截那部分的面积.

解 两曲面的交线为

$$x^2+y^2=ax,\ z^2=a^2-ax.$$

若将 Oxy 平面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 记以 C，其弧长记以 s，则所求的面积显然可表为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\,ds.$$

由于 $x^2+y^2=ax$ 即为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，故令

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\varphi,\ y=\frac{a}{2}\sin\varphi,$$

从而弧长的微分为 $ds=\frac{a}{2}d\varphi$，于是，面积为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\,ds=2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos\varphi)}\cdot\frac{a}{2}d\varphi$$

$$=2\int_0^{2\pi}a^2\sin\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a^2.$$

4321. 计算

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2},$$

若 $X=ax+by$，$Y=cx+dy$，且 C 为包围坐标原点的简单的封闭围线 $(ad-bc\neq 0)$.

解 首先注意，由于 $ad-bc\neq 0$，故只有原点 $(0,0)$ 使 $X^2+Y^2=0$. 易知

$$XdY-YdX=(ax+by)(cdx+ddy)$$

$$-(cx+dy)(adx+bdy)$$

$$=(ad-bc)(xdy-ydx),$$

故

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

其中

$$P = -\frac{(ad-bc)y}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2},$$

$$Q = \frac{(ad-bc)x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}.$$

容易算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$= -\frac{(ad-bc)[(a^2+c^2)x^2-(b^2+d^2)y^2]}{[(ax+by)^2+(cx+dy)^2]^2}$$

$((x,y) \neq (0,0)$ 时$)$,

故由格林公式知

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$- \oint_{C'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

其中 C' 可为包围原点 $(0,0)$ 的任一位于 C 内的围线. 特别是, 可取 C' 为围线 $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=r^2$ (即 $X^2+Y^2=r^2$), $r>0$ 充分小. 于是, 得(利用格林公式)

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{C'} \frac{XdY - YdX}{X^2+Y^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_{X^2+Y^2=r^2} \frac{XdY - YdX}{X^2+Y^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi r^2} \oint_{X^2+Y^2=r^2} XdY \quad YdX$$

$$= \frac{ad-bc}{2\pi r^2} \oint_{X^2+Y^2=r^2} xdy - ydx$$

$$= \frac{ab-bc}{2\pi r^2} \iint\limits_{X^2+Y^2\leq r^2} 2dxdy$$

$$= \frac{ad-bc}{\pi r^2} \iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2} \left| \frac{D(x,y)}{D(X,Y)} \right| dXdY.$$

由于$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)} = ad-bc$，故$\frac{D(x,y)}{D(X,Y)} = \frac{1}{ad-bc}$. 于是，代入上式得

$$I = \frac{ad-bc}{\pi r^2} \iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2} \frac{1}{|ad-bc|} dXdY$$

$$= \frac{ad-bc}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{|ad-bc|} \cdot \pi r^2 = \operatorname{sgn}(ad-bc).$$

4322. 若简单的围线 C 包围坐标原点，$X=\varphi(x,y)$，$Y=\psi(x,y)$，而曲线 $\varphi(x,y)=0$ 和 $\psi(x,y)=0$ 在围线 C 内面有几个单交点，计算积分 I（参阅前题）.

解 设 $\varphi(x,y)=0$，$\psi(x,y)=0$ 在 C 内的交点为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)$. 首先注意，本题应假定函数 $\varphi(x,y)$ 与 $\psi(x,y)$ 在 C 围成的区域内具有连续的二阶偏导数，并且在各点 $P_i(i=1,2,\cdots,m)$ 处有 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)} = \varphi_x'\psi_y' - \varphi_y'\psi_x' \neq 0$. 容易算得

$$XdY - YdX = (\varphi\psi_x' - \varphi_x'\psi)dx + (\varphi\psi_y' - \varphi_y'\psi)dy,$$

从而

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

其中

$$P = \frac{\varphi\psi'_x - \varphi'_x\psi}{\varphi^2+\psi^2}, Q = \frac{\varphi\psi'_y - \varphi'_y\psi}{\varphi^2+\psi^2}.$$

又可算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{(\varphi^2+\psi^2)^2}[(\varphi\psi''_{xy} - \varphi''_{xy}\psi)(\varphi^2+\psi^2)$$

$$-(\varphi_x'\psi_y' + \varphi_y'\psi_x')\varphi^2 + (\varphi_x'\psi_x' + \varphi_y'\psi_y')\psi^2$$
$$+ 2(\varphi_x'\varphi_y' - \psi_x'\psi_y')\varphi\psi]$$
$$((x,y) \neq (x_i,y_i)(i = 1,2,\cdots,m)).$$

围绕点 $P_i(x_i,y_i)$ 作围线 C_i：$[\varphi(x,y)]^2 + [\psi(x,y)]^2 = r^2$（即 $X^2 + Y^2 = r^2$），取 $r > 0$ 充分小，使诸 C_i 互不相交且都位于 C 内（这是办得到的，因为在各点 P_i，$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)} \neq 0$. 从而由连续性知在 P_i 的某邻域内 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)} \neq 0$ 且保持定号，于是根据隐函数存在定理知变换 $X = \varphi(x,y)$，$Y = \psi(x,y)$ 在点 $(x,y) = (x_i,y_i)$ 邻近及点 $(X,Y) = (0,0)$ 邻近是双方单值双方连续的）并使 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}$ 在 P_i 的邻近 $X^2 + Y^2 \leqslant r^2$（记为 S_i）上保持定号，将格林公式应用于诸围线 $C,C_1,\cdots,C_m$ 之间的区域，可得

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \oint_{C_i} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

故

$$I = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m} \oint_{C_i} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}. \tag{1}$$

但

$$\oint_{C_i} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$$
$$= \frac{1}{r^2}\oint_{C_i} XdY - YdX$$
$$= \frac{1}{r^2}\oint_{C_i} (\varphi\psi'_x - \varphi'_x\psi)dx + (\varphi\psi'_y - \varphi'_y\psi)dy$$

$$= \frac{1}{r^2}\iint\limits_{S_i} 2(\varphi'_x\psi'_y - \varphi'_y\psi'_x)dxdy$$

$$= \frac{2}{r^2}\iint\limits_{S_i} \frac{D(X,Y)}{D(x,y)}dxdy$$

$$= \frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\iint\limits_{S_i} \frac{D(X,Y)}{D(x,y)}dxdy$$

$$= \frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2} dXdY$$

$$= \frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\cdot \pi r^2$$

$$= 2\pi\left(\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right)_{P_i},$$

代入(1)式,即得

$$I = \sum_{i=1}^{m}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right)_{P_i},$$

或写为

$$I = \sum \operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)},$$

其中的$\sum$是对曲线$\varphi(x,y)=0$与$\psi(x,y)=0$在C内的各交点相加.

注:显然,4321题是4322题的特例.这时,曲线$ax+by=0$与$cx+dy=0$在C内只有一个交点,即原点$(0,0)$,而$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}=ad-bc$.

4323. 证明,若C为封闭的围线且$\vec{l}$为任意的方向,有

$$\oint_C \cos(\vec{l},\vec{n})ds = 0,$$

式中n为围线C的外法线.

证 如图8.66所示.不妨规定C的方向为逆时针的,以 $\vec{t}$ 表示.由于夹角

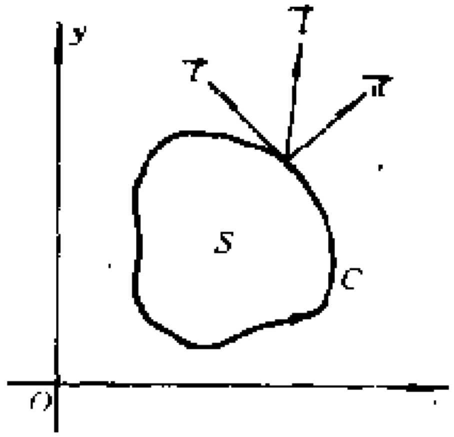

图 8.66

$$(\vec{l},\vec{n}) = (\vec{l},x) - (\vec{n},x),$$

故得

$$\cos(\vec{l},\vec{n}) = \cos(\vec{l},x)\cos(\vec{n},x) - \sin(\vec{l},x)\sin(\vec{n},x).$$

但 $\sin(\vec{n},x) = \sin\left[(\vec{t},x) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos(\vec{t},x)$,

$\cos(\vec{n},x) = \cos\left[(\vec{t},x) - \frac{\pi}{2}\right] = \sin(\vec{t},x)$,且

$$\cos(\vec{t},x) = \frac{dx}{ds},\sin(\vec{t},x) = \frac{dy}{ds},$$

因此,有

$$\cos(\vec{l},\vec{n})ds = \cos(\vec{l},x)dy - \sin(\vec{l},x)dx.$$

再利用格林公式,并注意到 $\sin(\vec{l},x)$ 和 $\cos(\vec{l},x)$ 均为常数,即得

$$\oint_C \cos(\hat{l},\hat{n})ds$$

$$= \oint_C [-\sin(\hat{l},x)dx + \cos(\hat{l},x)]dy$$

$$= \iint_S 0dxdy = 0.$$

4324. 求积分

$$I = \oint_C [x\cos(\hat{n},x) + y\cos(\hat{n},y)]ds$$

之值，式中C为包围有界域S的简单封闭曲线，n为它的外法线.

解 如上题所述，已知

$$\cos(\hat{n},x) = \cos\left[(\hat{t},x) - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \sin(\hat{t},x) = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos(\hat{n},y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\hat{n},x)\right] = \sin(\hat{n},x)$$

$$= \sin\left[(\hat{t},x) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos(\hat{t},x) = -\frac{dx}{ds}.$$

于是，

$$I = \oint_C xdy - ydx = 2\cdot\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = 2S,$$

这里S表示有界域S面积的数值.

4325. 求

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_C(\vec{F},\hat{n})ds,$$

其中S为包含点(x_0,y_0)的围线C所界的面积，$d(S)$为域S的直径，$\hat{n}$为围线C的外法线上的单位向量，$\vec{F}\{x,y\}$为在$S+C$上连续地可微分的向量.

解 由 4321 题的推导过程中知，矢量 $\vec{n}$ 在坐标轴上的射影为

$$n_x = \cos(\vec{n}, x) = \frac{dy}{ds}, n_y = \cos(\vec{n}, y) = -\frac{dx}{ds}.$$

于是，

$$(\vec{F}, \vec{n})ds = (Xn_x + Yn_y)ds = Xdy - Ydx.$$

因此，利用格林公式知

$$\oint_C (\vec{F}, \vec{n})ds = \oint_C Xdy - Ydx$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dxdy$$
$$= \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \Bigg|_{(\xi,\eta)} \cdot S,$$

其中点 $(\xi,\eta) \in$ 域 S. 于是，

$$\lim_{d(S)\to 0} \frac{1}{S} \oint_C (\vec{F}, \vec{n})ds = \lim_{d(S)\to 0} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \Bigg|_{(\xi,\eta)}$$
$$= X'_x(x_0, y_0) + Y'_y(x_0, y_0).$$

§13. 曲线积分的物理应用

4326. 均匀分布在圆 $x^2 + y^2 = a^2, y \geqslant 0$ 的上半部的质量 M 以怎样的力吸引质量为 m 位于 $(0,0)$ 的质点？

解 由对称性知，引力在 Ox 轴上的射影 $X = 0$，故只要计算引力在 Oy 轴上的射影.

设圆心角为 θ，由 $ds = ad\theta$ 知，对于长为 ds 一段圆弧吸引质量为 m 的质点的力在 Oy 轴上的射影为

$$dY = -\frac{km\frac{M}{\pi a}}{a^2}\sin\theta \cdot a d\theta = -\frac{kmM}{\pi a^2}\sin\theta d\theta,$$

其中 k 为引力常数.

于是,所求的引力在 Oy 轴上的射影为

$$Y = -\frac{kmM}{\pi a^2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = -\frac{2kmM}{\pi a^2}.$$

4327. 计算单层的对数位

$$u(x,y) = \oint_C k\ln\frac{1}{r}ds,$$

式中 $k =$ 常数——密度,$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$,设围线 C 是圆周 $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

解　由对称性知,对数位

$$u(x,y) = 2k\int_0^{\pi}\ln\frac{1}{r}\cdot R d\theta$$

$$= 2Rk\int_0^{\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2R\rho\cos\theta + \rho^2}}d\theta$$

$$= -Rk\int_0^{\pi}\ln R^2\left[1 - 2\frac{\rho}{R}\cos\theta + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta,$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,$\xi x + \eta y = R\rho\cos\theta$,而 θ 是矢量 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ 与 $\vec{r}_1 = \xi\vec{i} + \eta\vec{j}$ 的正向夹角.

利用 3733 题(或 2192 题)的结果,可得

$$\int_0^{\pi}\ln\left[1 - 2\frac{\rho}{R}\cos\theta + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta$$

$$= \begin{cases} 0, & \rho \leqslant R; \\ 2\pi\ln\frac{\rho}{R}, & \rho > R. \end{cases}$$

于是,我们有

$$u(x,y) = -2Rk\int_0^{\pi}\ln R d\theta$$

$$-Rk\int_0^{\pi}\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta$$

$$=\begin{cases}2\pi Rk\ln\frac{1}{R}, \rho\leqslant R,\\ 2\pi Rk\ln\frac{1}{\rho}, \rho>R.\end{cases}$$

4328. 采用极坐标系标 ρ 和 φ，计算单层的对数位

$$I_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ln\frac{1}{r}d\psi$$

和

$$I_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\ln\frac{1}{r}d\psi.$$

式中 r 为点 (ρ,φ) 与动点 $(1,\psi)$ 间的距离，m 为自然数.

解 由于

$$r=\sqrt{(\rho\cos\varphi-\cos\psi)^2+(\rho\sin\varphi-\sin\psi)^2}$$

$$=\sqrt{1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2},$$

于是，当 $\rho<1$ 时，我们有

$$I_1=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ln[1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2]d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\cos(mu+m\varphi)\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\cos m\varphi\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\sin m\varphi\sin mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du.$$

因为上述右端两个积分中被积函数均为以 2π 为周期的函数，并注意到奇偶函数在对称区间上的积分性质，则有

$$I_1=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$+\frac{\sin m\varphi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-(\cos m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m}\rho^m\right)=\frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi^{*)}.$$

同理,我们有

$$I_2=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin m\psi\ln[1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2]d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{\varphi-2\pi}\sin(mu+m\varphi)\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-\frac{\cos m\varphi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$-\sin m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-\sin m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-(\sin m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m}\rho^m\right)=\frac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi.$$

当 $\rho>1$ 时,则有

$$I_1=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ln\rho\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)du$$

$$=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ln\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)du$$

$$=-(\cos m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m\rho^m}\right)=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi^{*)}.$$

同理,我们有

$$I_2=-\sin m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\ln\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)du$$

$$=-(\sin m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m\rho^m}\right)=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi.$$

对于 $\rho=0$，显然有

$$I_1=I_2=0.$$

现在来研究当 $\rho=1$ 的情况. 首先，积分

$$I_1=\int_0^\pi \cos mu \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

对于 ρ 在区间 $[1,1+\delta]$ 上是一致收敛的，其中 δ 为很小的正数. 事实上，对于充分小的 η，当 u 在 $(0,\eta)$ 内取值时，有

$$1>1-2\rho\cos u+\rho^2=(1-\rho)^2+2\rho(1-\cos u)$$
$$\geqslant 2(1-\cos u)>0.$$

于是，当 $1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$，$u\in(0,\eta)$ 时，有

$$|\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)|\leqslant|\ln 2(1-\cos u)|.$$

而积分

$$\int_0^\eta |\ln 2(1-\cos u)|du$$

是收敛的. 这是由于当 $0<2\beta<1$，有

$$\lim_{u\to+0} u^{2\beta}|\ln 2(1-\cos u)|$$
$$=\lim_{u\to+0} -[2(1-\cos u)]^\beta \ln[2(1-\cos u)]$$
$$\cdot\frac{u^{2\beta}}{2^\beta(1-\cos u)^\beta}$$
$$=0.1=0.$$

于是，积分

$$\int_0^\eta \cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

在 $1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$ 上一致收敛，故知积分

$$I_1=\int_0^\pi \cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

在 $1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$ 上一致收敛从而，I_1 作为参数 ρ 的函

数在 $\rho=1$ 是右连续的. 由此，根据上面已求出 $\rho>1$ 时 $I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi$，得知：当 $\rho=1$ 时，

$$I_1=\lim_{\rho\to 1+0}\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi=\frac{\pi}{m}\cos m\varphi.$$

同理，可得

$$I_2=\lim_{\rho\to 1+0}\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi=\frac{\pi}{m}\sin m\varphi.$$

综上所述，得

$$I_1=\frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi,\quad I_2=\frac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi,\quad \text{当 } 0\leqslant\rho\leqslant 1;$$

$$I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi,\quad I_2=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi,\quad \text{当 } \rho>1.$$

*）参看 И. М. 雷日克、И. С. 格拉德什坦编著"函数表与积分表"3.765 公式 1.

$$\int_0^\pi \ln(1-2p\cos x+p^2)\cos ax\,dx=-\frac{\pi}{a}p^a\ (p^2<1).$$

* *）根据上面公式，当 $p^2>1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \ln(1-2p\cos x+p^2)\cos ax\,dx\\
&=\int_0^\pi \ln p^2\left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos ax\,dx\\
&=\int_0^\pi 2\ln p\cdot\cos ax\,dx+\int_0^\pi \ln\left(1-2\frac{1}{p}\cos x\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{p^2}\right)\cos ax\,dx\\
&=\int_0^\pi \ln\left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos ax\,dx\\
&=-\frac{\pi}{a}p^{-a},
\end{aligned}$$

其中 a 为自然数.

4329. 计算高斯积分

$$u(x,y)=\oint_C \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds,$$

式中 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 为向量 $\vec{r}$ 的长度，此向量是连接点 $A(x,y)$ 和简单封闭光滑围线 C 上的动点 $M(\xi,\eta)$ 而得的，$(\vec{r},\vec{n})$ 为向量 $\vec{r}$ 与在曲线 C 上 M 点的外法线 $\vec{n}$ 所夹的角.

解 设 $\vec{n}$ 与 Ox 轴的夹角为 α，$\vec{r}$ 与 Ox 轴的夹角为 β，则 $(\vec{r},\vec{n})=\alpha-\beta$. 于是，

$$\begin{aligned}\cos(\vec{r},\vec{n})&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\sin\alpha.\end{aligned}$$

代入高斯积分，得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\oint_C\left(\frac{\eta-y}{r^2}\sin\alpha+\frac{\xi-x}{r^2}\cos\alpha\right)ds\\&=\oint_C\frac{\xi-x}{r^2}d\eta-\frac{\eta-y}{r^2}d\xi.\end{aligned}$$

令

$$P=-\frac{\eta-y}{r^2},\quad Q=\frac{\xi-x}{r^2},$$

则有

$$\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},$$

因而 P、Q 的偏导数除去点 A（此处 $r=0$）外，在全平面上是连续的，并且 $\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{\partial P}{\partial\eta}$. 于是，利用格林公式知：当点 A 在曲线 C 之外时，有

$$u(x,y)=\oint_{C}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds=0.$$

当点 A 在曲线 C 之内时，则在曲线 C 内以 A 为圆心，R 为半径作一圆 l，即得

$$u(x,y)=\oint_{l}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds=\oint_{l}\frac{1}{R}ds=2\pi.$$

当点 A 在曲线 C 上时，不妨利用关系式

$$\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds=d\varphi^{*)},$$

其中 $d\varphi$ 为从点 A 看曲线 C 上弧长的微分 ds 所张的角度. 今以 A 为圆心，r_1 为半径作一小圆，交 C 于 B_1 及 B_2 两点，将曲线 C 除去小圆内的部分记以 $\overset{\frown}{B_1B_2}$，则有

$$\int_{\overset{\frown}{B_1B_2}}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds=\int_{\overset{\frown}{B_1B_2}}d\varphi=\angle B_1AB_2.$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\oint_{C}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds\\&=\lim_{r_1\to+0}\int_{\overset{\frown}{B_1B_2}}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds\\&=\lim_{r_1\to+0}\angle B_1AB_2=\pi.\end{aligned}$$

综上所述，得高斯积分

$$u(x,y)=\oint_{C}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds=\begin{cases}0,\text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 外；}\\ \pi,\text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 上；}\\ 2\pi,\text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 内.}\end{cases}$$

*）参看 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》538 目.

4330. 采用极坐标系 ρ 和 φ，计算双层的对数位

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}d\psi$$

和

$$K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}d\psi.$$

式中 r 为点 $A(\rho,\varphi)$ 和动点 $M(1,\psi)$ 之间的距离，$(\vec{r},\vec{n})$ 为方向 $\overrightarrow{AM}=\vec{r}$ 与从点 $O(0,0)$ 所引的半径 $\overrightarrow{OM}=\vec{n}$ 二者之间的夹角，m 为自然数.

解 由题意知：

$$\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}$$

$$=\frac{(\cos\psi-\rho\cos\varphi)\cos\psi+(\sin\psi-\rho\sin\varphi)\sin\psi}{(\cos\psi-\rho\cos\varphi)^2+(\sin\psi-\rho\sin\varphi)^2}$$

$$=\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}.$$

从而，当 $\rho=1$ 时，$\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}=\frac{1}{2}$. 又因 m 为自然数，故此时有

$$K_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi d\psi=0,$$

$$K_2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin m\psi d\psi=0.$$

当 $\rho<1$ 时，因为级数（利用 2968 题的结果）

$$\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n\cos n(\psi-\varphi)$$

在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛，乘 $\cos m(\psi-\varphi)$ 和 $\sin m(\psi-\varphi)$ 以后在 $[0,2\pi]$ 上也一致收敛，故可逐项积分. 于是

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\int_0^{2\pi}[\cos m(\psi-\varphi)\cos m\varphi-\sin m(\psi-\varphi)\sin m\varphi]$$

$$\cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n \cos n(\psi - \varphi)\right] d\psi$$

$$= \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos m(\psi - \varphi) \rho^m \cos m(\psi - \varphi) d\psi$$

$$= \rho^m \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 m(\psi - \varphi) d\psi$$

$$= \pi \rho^m \cos m\varphi.$$

同理，容易求得

$$K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} d\psi$$

$$= \pi \rho^m \sin m\varphi.$$

当 $\rho > 1$ 时，我们有

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} d\psi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} d\psi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi$$

$$\cdot \frac{[1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)] + (1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} d\psi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} d\psi$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\psi - \varphi)} d\psi$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi$$

$$\cdot \frac{(1 - r^2) + [1 + r^2 - 2r\cos(\psi - \varphi)]}{1 + r^2 - 2r\cos(\psi - \varphi)} d\psi$$

$$= -\int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - r\cos(\psi - \varphi)}{1 + r^2 - 2r\cos(\psi - \varphi)} d\psi$$

$$= -\pi r^m \cos m\varphi = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi,$$

其中 $r = |\rho| < 1$.

同理,可求得

$$K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi$$

$$= -\frac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi.$$

综上所述,得

$K_1 = \pi\rho^m\cos m\varphi$, $K_2 = \pi\rho^m\sin m\varphi$, 当 $\rho < 1$,

$K_1 = K_2 = 0$, 当 $\rho = 1$,

$K_1 = -\frac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi$, $K_2 = -\frac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi$, 当 $\rho > 1$.

4331. 若 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,则称可微分两次的函数 $u = u(x,y)$ 为调和函数. 证明:当且仅当

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

(式中 C 为任意封闭围线,$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿此围线之外法线的导函数)时,u 是调和函数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x),$$

而(参看 4324 题的推导)

$$\cos(\vec{n},x) = \frac{dy}{ds}, \quad \sin(\vec{n},x) = -\frac{dx}{ds},$$

故利用格林公式(注意,题中应假定 $u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数),得

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_C \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy$$

$$= \iint_S (\Delta u) dxdy,$$

其中 S 表由封闭围线 C 围成的区域. 由此式知：

$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$（对任何封闭围线 C）当且仅当 $\iint_S (\Delta u) \cdot dxdy = 0$（对任何区域 S）. 但易知这又相当于 $\Delta u \equiv 0$. 事实上，若 $\Delta u \equiv 0$，则对任何 S，有 $\iint_S (\Delta u) \cdot dxdy = 0$；反之，若对任何 S，有 $\iint_S (\Delta u) dxdy = 0$，则必 $\Delta u \equiv 0$. 因为，若不然，在某点 (x_0, y_0)，$\Delta u \neq 0$. 例如，设在此点，$\Delta u > 0$，则由连续性可知，必存在以 (x_0, y_0) 为中心，半径为 r_0（充分小）的圆域 S_0，使在其上每一点，都有 $\Delta u > 0$. 由此可知，$\iint_{S_0} (\Delta u) dxdy > 0$. 矛盾，证毕.

4332. 证明：

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy$$

$$= - \iint_S u \Delta u dxdy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

式中光滑围线 C 包围着有界域 S.

证 由于

$$\oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_C u \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\vec{n}, x) \right] ds$$

$$= \oint_C u\frac{\partial u}{\partial x}dy - u\frac{\partial u}{\partial y}dx$$

$$= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$= \iint_S u\Delta u dxdy + \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,$$

故得

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy = -\iint_S u\Delta u dxdy$$

$$+ \oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds.$$

4333. 证明：在有界域 S 内及其周界 C 为调和的函数，则此函数单值地由它在围线 C 上的数值确定（参照习题 4332）.

证 由题意知，我们只要证明：如在有界域 S 上的两个调和函数 u_1 和 u_2，在其周界 C 上有相同的数值，则它们在整个域上恒等. 这也就是要证明：若调和函数 $u = u_1 - u_2$ 在周界 C 上等于零，则它在整个域上恒为零. 事实上，利用 4332 题的结果，得

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy = 0.$$

于是，在整个域 S 上，有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

这表明，在 S 上 u 为常数. 但在周界 C 上 $u = 0$，故在域 S 上 $u \equiv 0$，即 $u_1 = u_2$.

4334. 证明平面上的格林第二公式

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

式中光滑的围线C包围着有界线S，$\frac{\partial}{\partial n}$为沿$C$的外法线方向的导函数.

证 我们有

$$\oint_C v\frac{\partial u}{\partial n}ds = \oint_C v\Big[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x)\Big]ds$$

$$= \oint v\frac{\partial u}{\partial x}dy - v\frac{\partial u}{\partial y}dx$$

$$= \iint\limits_S \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(-v\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big]dxdy$$

$$= \iint\limits_S \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy + \iint\limits_S v\Delta u dxdy.$$

同理，有

$$\oint_C u\frac{\partial v}{\partial n}ds = \oint_C u\frac{\partial v}{\partial x}dy - u\frac{\partial v}{\partial y}dx$$

$$= \iint\limits_S \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(-u\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Big]dxdy$$

$$= \iint\limits_S \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy + \iint\limits_S u\Delta v dxdy.$$

于是，

$$\oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds = \oint_C \Big(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\Big)ds$$

$$= \iint_S v\Delta u dxdy - \iint_S u\Delta v dxdy$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdy.$$

4335. 利用格林第二公式证明，若 $u = u(x,y)$ 是有界闭域 S 内的调和函数，则

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\oint_C \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

式中 C 为域 S 的边界，$\vec{n}$ 为围线 C 的外法线方向，(x,y) 为域 S 内的点，$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 为点 (x,y) 与围线 C 上的动点 (ξ,η) 间的距离.

证 先证 $v = \ln r$ 为 (ξ,η) $((\xi,\eta) \neq (x,y))$ 的调和函数. 事实上，我们有

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\eta - y}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \frac{(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}.$$

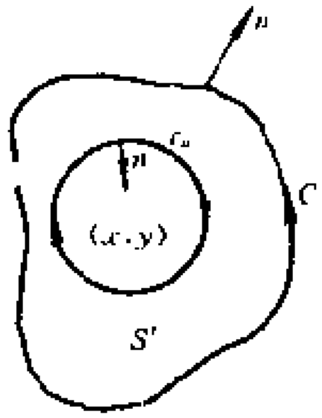

图 8.67

因此，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0, \text{即 } \Delta v = 0.$$

今以点 (x,y)（当 $(\xi,\eta) \neq (x,y)$ 时）为中心，ρ 为半径画一圆 C_0，使此圆包含在围线 C 内. C_0 及 C 的正向如图 8.67 所示. 曲线 C 的法线向外，C_0 的法线指向点 (x,y). 因此，在 C_0 上，我们有

$$\left.\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=-\left.\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}$$
$$=-\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=-\frac{1}{\rho}.$$

现将格林第二公式应用到由 C_0 及 C 所界的域 S' 上去，即得

$$\iint\limits_{S'}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta \ln r\\ u & \ln r\end{vmatrix} d\xi d\eta=\oint\limits_{C_0+C}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix} ds.$$

由于 $\Delta \ln r=0, \Delta u=0$，故得

$$\oint\limits_{C_0+C}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix} ds=0.$$

将行列式展开，并利用线积分性质，即得

$$\oint_C\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds$$
$$=-\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds.$$

但由于

$$\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds$$
$$=\oint_{C_0}\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}ds-\oint_{C_0}u\left(-\frac{1}{\rho}\right)ds$$
$$=0.\ln\rho^{*)}+\frac{1}{\rho}\oint_{C_0}u ds$$
$$=\frac{1}{\rho}u(\xi',\eta')\oint_{C_0}ds^{**)}=2\pi u(\xi',\eta'),$$

其中 $u(\xi',\eta')$ 为 u 在圆 C_0 上某点的值，故得

$$u(\xi',\eta')=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

两端令 $\rho \to +0$ 取极限，并注意到函数 u 在点 (x,y) 的连续性，即得

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\oint_C \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

*) 利用 1331 题的结果.

* *) 利用第一型曲线积分的中值定理，其证明方法与普通定积分的中值定理类似.

4336.[*] 证明对于调和函数 $u(M) = u(x,y)$ 的中值定理：

$$u(M) = \frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho} u(\xi,\eta)ds;$$

式中 C_ρ 是以 M 点为中心 ρ 为半径的圆周.

证 利用 4335 题的结果(取 C 为 C_ρ)，得

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds;$$

但在 C_ρ 上，有

$$r = \rho,$$

$$\left.\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho} = \left.\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho} = \left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho},$$

由此，再注意到 $\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}ds = 0$(这是利用 4331 题的结果)，得

$$\begin{aligned}u(M) &= \frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left(\frac{u}{\rho} - \ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds \\ &= \frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho} u ds - \frac{\ln\rho}{2\pi}\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}ds \\ &= \frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho} u(\xi,\eta)ds.\end{aligned}$$

证毕.

*) 原题中漏掉了 ρ，即应将$\frac{1}{2\pi}$改为$\frac{1}{2\pi\rho}$.

4337. 证明在有界闭域内是调和的且于此域内不为常数的函数 $u(x,y)$ 在此域的内点不能达到其最大或最小值(极大值原则).

证 设有界闭域为 $\overline{\Omega}$，它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明：如果 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0,y_0)$ 达到其最大值或最小值(例如，设达到最大值)，则 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上必为常数. 下分三步证之.

i) 先证：若圆域 $S_\rho=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2\}$ 完全属于 Ω，则 $u(x,y)$ 在 S_ρ 上为常数.

对任何 $0<r\leqslant\rho$，用 C_r 表圆周$\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\}$. 由 4336 题的结果可知

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}u(\xi,\eta)ds,$$

故

$$\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]ds=0. \tag{1}$$

但因 $u(x_0,y_0)$ 为最大值，故在 C_r 上恒有

$$u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant 0.$$

由此，根据(1)，即易知在C_r上 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\equiv 0$. 因为，若有某点$(\xi_0,\eta_0)\in C_r$使 $u(x_0,y_0)-u(\xi_0,\eta_0)=\tau>0$，则由 $u(x,y)$ 的连续性可知，必有以(ξ_0,η_0)为中心的某小圆域σ存在，使当$(\xi,\eta)\in\sigma$时，恒有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant\frac{\tau}{2}$. 用$C'$ 表 C_r 含于 σ 内的部分，则

$$\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]ds\geqslant\int_{C_r'}[u(x_0,y_0)$$

$$- u(\xi,\eta)]ds \geqslant \int_{C_r'} \frac{\tau}{2} ds = \frac{1}{2}\tau l_r > 0,$$

其中 l_r 表圆弧 C_r' 之长，此显然与(1)式矛盾.

于是，在 C_r' 上恒有 $u(x_0,y_0) - (\xi,\eta) \equiv 0$. 再根据 r 的任意性($0 < r \leqslant \rho$)，即知对任何$(\xi,\eta) \in S_\rho$，都有 $u(\xi,\eta) = u(x_0,y_0)$. 换句话说，$u(x,y)$ 在 S_ρ 上是常数.

ii) 次证：设 $P^*(x^*,y^*)$ 为 Ω 的任一内点(即 $P^* \in \Omega$)，则必 $u(x^*,y^*) = u(x_0,y_0)$.

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0,y_0)$ 与点 $P^*(x^*,y^*)$ 连接起来(图 8.68). 用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的

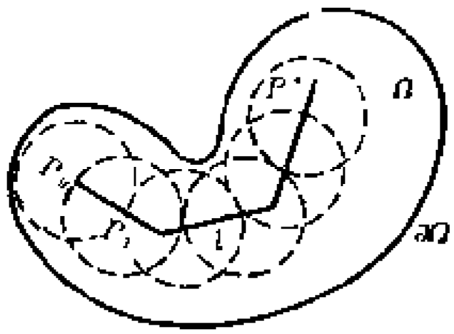

图 8.68

距离，即 $\delta = \min \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$，其中的 min 是对一切$(x,y) \in \partial\Omega$，$(x,y) \in l$ 来取的(由于 $\partial\Omega$，l 是互不相交的有界闭集，可证 min 一定能达到，从而 $\delta > 0$). 取 $0 < \delta' < \delta$. 以点 P_0 为中心，δ 为半径作一圆，得圆域 $S_0 = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant \delta'^2\}$，此圆域完全含于 Ω 内，由 i) 段已证的结论知 $u(x,y)$ 在 S_0 中为常数. 特别 $u(x_1,y_1) = u(x_0,y_0)$，这里点 $P_1(x_1,y_1)$

代表圆周 $C_0=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)=\delta'^2\}$ 与折线 l 的交点. 又以点 P_1 为中心,δ' 为半径作一圆,得圆域 $S_1=\{(x,y)|(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\leqslant\delta'^2\}$. 由于 $u(x,y)$ 在点 $P_1(x_1,y_1)$ 也达到最大值,而 S_1 完全含于 Ω 内,故将 i) 段结果用于 S_1 可知 $u(x,y)$ 在 S_1 上为常数,特别 $u(x_2,y_2)=u(x_1,y_1)$,这里点 $P_2(x_2,y_2)$ 表圆周 $C_1=\{(x,y)|(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\delta'^2\}$ 与 l 的交点(除 P_0 外的另一交点). 再以点 P_2 为中心,δ 为半径作一圆域 S_2,…,这样继续作下去,显然,至多经过 n 次(n 表大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正整数,s 表 l 的长),点 $P^*(x^*,y^*)$ 必属于 S_{n-1},从而

$$\begin{aligned}u(x^*,y^*)&=u(x_{n-1},y_{n-1})=\cdots=u(x_1,y_1)\\&=u(x_0,y_0).\end{aligned}$$

iii) 由 ii) 段的结果可知,$u(x,y)$ 在 Ω 上是常数;根据 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的连续性,通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限,即知 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是常数. 证毕.

注:从证明过程中看出,需假定区域 Ω(从而 $\overline{\Omega}$)是连通的. 事实上,若 Ω 不连通,则结论不一定成立. 例如,设 $\overline{\Omega}=S_1+S_2$,其中 S_1 与 S_2 是两个互无公共点的闭圆域,而令

$$u(x,y)=\begin{cases}c_1, & (x,y)\in S_1;\\ c_2, & (x,y)\in S_2,\end{cases}$$

其中 $c_1\neq c_2$ 是两个常数,则显然 $u(x,y)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\overline{\Omega}$ 上不是常数,但它却在其内点达到最大值与最小值.

4338. 证明黎曼公式

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dxdy = \oint_C Pdx + Qdy,$$

式中

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} - cu,$$

$$M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial v}{\partial x} - b\frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

(a,b,c 为常数).P 和 Q 为某些确定的函数,围线 C 包围着有界域 S.

证 因为

$$\begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} = vL[u] - uM[v]$$

$$= v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + av\frac{\partial u}{\partial x} + bv\frac{\partial u}{\partial y} + cuv$$

$$- u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + au\frac{\partial v}{\partial x} + bu\frac{\partial v}{\partial y} - cuv$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + a\frac{\partial}{\partial x}(vu)$$

$$+ b\frac{\partial}{\partial y}(uv)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} + auv\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - buv\right),$$

故利用格林公式,即得

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dxdy = \oint_C Pdx + Qdy,$$

其中

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x} - buv, \quad Q = v\frac{\partial u}{\partial y} + auv.$$

4339. 设 $u = u(x,y)$ 和 $v = v(x,y)$ 为液体的速度的分量.

求在单位时间内流过以围线 C 为界的域 S 的液体的量(即液体流出量与流入量的差). 若液体不能压缩且在域 S 内没有源泉和漏孔,则函数 u 和 v 满足怎样的方程式?

解 设液体的速度为 $\vec{W}$,则 $\vec{W}=u\vec{i}+v\vec{j}$,又 $d\vec{s}=dx\cdot\vec{i}+dy\vec{j}$. 于是,所求的液体量

$$Q=\oint_C \vec{\omega}\cdot\vec{n}\,ds=\oint_C[u\cos(\vec{n},x)+v\sin(\vec{n},x)]ds$$

$$=\oint_C udy-vdx^{*)}=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中 $\vec{n}$ 表示曲线 C 的外法线上的单位矢量,并且此处已假定流体的面密度等于 1. 若液体是不可压缩的,且在域 S 内无源泉和漏孔,则液体流出量与流入量的差 Q 应等于零,即

$$\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

又显然,对于任意的围线 C,上述结果均正确. 于是,连续函数 u,v 应满足方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

*) 参看 4323 题的题解.

4340.+ 根据比奥沙伐耳(БИО — САВАР)定律通过线元 ds 的电流 i 在空间的点 $M(x,y,z)$ 处产生一磁场,其应力为

$$d\vec{H}=ki\frac{(\vec{r}\times d\vec{s})}{r^3},$$

其中 $\vec{r}$ 为连接元素 $d\vec{s}$ 与点 M 的向量,k 为比例系数. 对于封闭导线 C 的情形求磁场 $\vec{H}$ 在点 M 之应力的射影 H_x,H_y,H_z.

解　由题意知：若设导线 C 上的动点为 (ξ,η,ζ)，则

$$\vec{r}=(\xi-x)\vec{i}+(\eta-y)\vec{j}+(\zeta-z)\vec{k}.$$

又 $d\vec{s}=d\xi\,\vec{i}+d\eta\,\vec{j}+d\zeta\,\vec{k}$. 于是，磁场强度

$$\vec{H}=ki\oint_C\frac{1}{r^3}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \xi-x & \eta-y & \zeta-z\\ d\xi & d\eta & d\zeta\end{vmatrix}$$

$$=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\eta-y)d\zeta-(\zeta-z)d\eta]\,\vec{i}$$

$$+ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\zeta-z)d\xi-(\xi-x)d\zeta]\,\vec{j}$$

$$+ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\xi-x)d\eta-(\eta-y)d\xi]\,\vec{k},$$

从而射影

$$H_x=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\eta-y)d\zeta-(\zeta-z)d\eta],$$

$$H_y=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\zeta-z)d\xi-(\xi-x)d\zeta],$$

$$H_z=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\xi-x)d\eta-(\eta-y)d\xi],$$

§14. 曲面积分

1° 第一型的曲面积分　　若 S 为逐片光滑的双面曲面

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$
$$((u,v)\in\Omega),\tag{1}$$

而 $f(x,y,z)$ 为在曲面 S 上的各点上有定义并且是连续的函数，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

$$\cdot \sqrt{EG - F^2}\,dudv, \tag{2}$$

式中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

特别情形，若曲面的方程式的形状为

$$z = z(x,y) \qquad ((x,y) \in \sigma),$$

其中 $z(x,y)$ 为单值连续地可微分函数，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_\sigma f(x,y,z(x,y))$$

$$\cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

此积分与曲面 S 的方向的选择无关.

若把函数 $f(x,y,z)$ 当作曲面 S 在点 (x,y,z) 的密度，则积分(2)是此曲面的质量.

2° 第二型的曲面积分　若 S 为平滑的双面曲面；S^+ 为它的正面，由法线的方向 $\vec{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 所确定的一面，$P = P(x,y,z)$，$Q = Q(x,y,z)$，$R = R(x,y,z)$ 为在曲面 S 上有定义而且连续的三个函数，则

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

$$= \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS. \tag{3}$$

若曲面 S 的方程为参数式(1)，则法线 $\vec{n}$ 的方向余弦由下列公式来确定：

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中 $A = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $B = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$,

$$C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且方根前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面 S 的另一面 S^- 时,积分(3)的符号变为相反的符号.

4341. 积分

$$I_1 = \iint_S (x^2+y^2+z^2)dS$$

和 $$I_2 = \iint_P (x^2+y^2+z^2)dP,$$

(式中 S 为球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的表面,P 为内接于此球的八面体 $|x|+|y|+|z|=a$ 的表面)相差若干?

解 若令

$$x = a\sin\varphi\cos\theta, \quad y = a\sin\varphi\sin\theta, \quad z = a\cos\varphi,$$

则有

$$I_1 = \iint_S (x^2+y^2+z^2)dS = \int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\pi} a^2\cdot a^2\sin\varphi d\theta$$

$$= 4\pi a^4.$$

为求 I_2,只要注意到 $|z| = a-(|x|+|y|)$,并利用对称性,即得

$$I_2 = \iint_P (x^2+y^2+z^2)dP = 8\int_0^a dx\int_0^{a-x}\sqrt{3}$$

$$\cdot[x^2+y^2-(a-x-y)^2]dy$$

$$= 16\sqrt{3}\int_0^a dx\int_0^{a-x}\left[x^2 + y^2 + xy + \frac{a^2}{2} - a(x+y)\right]dy$$

$$= 16\sqrt{3}\int_0^a\left[x^2(a-x) - \frac{1}{6}(a-x)^3 - ax(a-x) + \frac{a^2}{2}(a-x)\right]dx$$

$$= 16\sqrt{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)a^4$$

$$= 2\sqrt{3}a^4.$$

于是,两积分之差

$$I_1 - I_2 = 2(2\pi - \sqrt{3})a^4.$$

4342. 计算

$$\iint\limits_S z\,dS,$$

式中 S 为曲面 $x^2 + z^2 = 2az(a > 0)$ 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所割下的部分.

解 作变换

$$x = ar\sin\theta,\quad y = y,\quad z = a + ar\cos\theta,$$

则两曲面分别化为

$$r = 1, \text{和 } y^2 = 2a^2\cos\theta(1 + \cos\theta)$$

两曲面交线的参数方程为

$$x = a\sin\theta,\quad y = \pm\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1 + \cos\theta)},$$

$$z = a + a\cos\theta\quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

于是,

$$\iint\limits_S z\,dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{-\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}(a + a\cos\theta)a\,dy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}a^3\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta)^3}\,d\theta$$

$$=-4\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta)^3}}{\sin\theta}d(\cos\theta)$$

$$=-4\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta}(1+\cos\theta)}{\sqrt{(1-\cos\theta)}}d(\cos\theta)$$

$$=4\sqrt{2}a^3\int_0^1\left[t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right]dt$$

$$=4\sqrt{2}a^3\left[B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)+B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{7}{2}\sqrt{2}\pi a^4.$$

计算下列第一型曲面积分：

4343. $\iint\limits_S (x+y+z)dS$，式中 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$.

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

故有

$$\iint\limits_S (x+y+z)dS=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\cdot\left[x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right]dy$$

$$=\int_{-a}^{a}(\pi a x+2a\sqrt{a^2-x^2})dx$$

$$=4a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 4a \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^3.$$

4344. $\iint\limits_S (x^2 + y^2) dS$，式中 S 为体积 $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$ 的边界.

解 面积 S 由两部分组成. 一部分为 $S_1: z = \sqrt{x^2 + y^2}$，它在 Oxy 平面上的射影为 $x^2 + y^2 = 1$；另一部分为 $S_2: z = 1$，它在 Oxy 平面上的射影也是 $x^2 + y^2 = 1$. 对于这两部分分别有

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 1.$$

若利用极坐标，则

$$\iint\limits_S (x^2 + y^2) dS = \iint\limits_{S_1} (x^2 + y^2) dS + \iint\limits_{S_2} (x^2 + y^2) dS$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr$$

$$= \frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

4345. $\iint\limits_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$，式中 S 为四面体 $x + y + z \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ 的边界.

解 曲面 S 由四部分组成，分别为 $S_1: x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0$；$S_2: x = 0, S_3: y = 0, S_4: z = 0$. 于

是，我们有

$$\iint\limits_{S}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$+\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\frac{dz}{(1+y)^2}+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dz}{(1+x)^2}$$

$$+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$+2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dz}{(1+x)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)+2(1-\ln 2)$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2.$$

4346. $\iint\limits_{S}|xyz|dS$，式中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的部分.

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)},$$

故利用极坐标，并注意对称性，即得

$$\iint\limits_{S}|xyz|dS=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr$$

$$=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,dr=\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t}\,dt^{*)}$$

$$=\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{32}(y^2-1)^2y^2dy^{**)}$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{y^7}{7}-\frac{2y^5}{5}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}}=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

*）作代换 $r^2 = t$.

**）作代换 $\sqrt{1+4t} = y$.

4347. $\iint\limits_S \frac{dS}{\rho}$，式中 S 为椭球表面，ρ 为椭球中心到与椭球表面的元素 dS 相切的平面之间的距离.

解 设椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

则曲面上任一点 (x,y,z) 的法矢量为 $\left\{\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right\}$.

从而，由题设知：$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos(\vec{n},\vec{r})$，其中 $\vec{n}$，$\vec{r}$ 分别表示点 (x,y,z) 处的法矢量和矢径，即

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

而法线与 Oz 轴夹角的余弦为

$$\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

于是，

$$\iint\limits_S \frac{dS}{\rho}=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1}\frac{c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}{|z|}dxdy$$

$$=2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1}\frac{c\left[\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}}dxdy$$

$$= 2\int_0^1 dr\int_0^{2\pi} \frac{c}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{c^2} - \frac{r^2}{c^2}\right) abrd\theta^{*)}$$

$$= 2\pi abc\int_0^1\left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) - \sqrt{1-r^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) + 2\frac{\sqrt{1-r^2}}{c^2}\right] rdr^{**)}$$

$$= -\pi abc\left\{2\sqrt{1-r^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) - \frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) + \frac{4}{3c^2}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right\}\Big|_0^1$$

$$= \frac{4\pi}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

*）作广义极坐标变换：$x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$.

**）利用关系式：$\dfrac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \sqrt{1-r^2}$.

4348. $\iint\limits_S zdS$，式中 S 为螺旋面 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$ $(0 < u <; 0 < v < 2\pi)$ 的一部分.

解 由于

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$= \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$= u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1 + u^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= -u\sin v\cos v + u\cos v\sin v = 0,$$

故得 $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+u^2}$. 于是,

$$\iint\limits_S z\,dS=\int_0^a du\int_0^{2\pi} v\sqrt{1+u^2}\,dv$$

$$=2\pi^2\int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$=2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]\Bigg|_0^a$$

$$=\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})].$$

4349. $\iint\limits_S z^2 dS$,式中 S 为圆锥表面的一部分 $x=r\cos\varphi\sin\alpha$, $y=r\sin\varphi\sin\alpha$, $z=r\cos\alpha$ $(0\leqslant r\leqslant a; 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ 和 α 为常数 $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

解 由于

$E=\cos^2\varphi\sin^2\alpha+\sin^2\varphi\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

$G=r^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha+r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha=r^2\sin^2\alpha$,

$F=(\cos\varphi\sin\alpha)(-r\sin\varphi\sin\alpha)+\sin\varphi\sin\alpha$

$\quad\cdot(r\cos\varphi\sin\alpha)=0$,

故得 $\sqrt{EG-F^2}=r\sin\alpha$. 于是,

$$\iint\limits_S z^2 dS=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^2\cos^2\alpha\cdot r\sin\alpha\,dr$$

$$=\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

4350. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$, 式中 S 为圆锥曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分.

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}$$

$= \sqrt{2}$，

又曲面 S 在 Oxy 平面上的射影域为 $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$.

于是，利用极坐标，即得

$$\iint\limits_S (xy + yz + zx)dS$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} [r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)]rdr$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\cos\varphi d\varphi$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi d\varphi = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

4351. 证明普阿桑公式

$$\iint\limits_S f(ax + by + cz)dS$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})du,$$

式中 S 是球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的表面.

证 取新坐标系 $Ouvw$，其中原点不变，平面 $ax + by + cz = 0$ 即为 Ovw 面，u 轴垂直于该面，则有

$$u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

在新坐标系下，公式左端的积分可写为

$$\iint\limits_S f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})dS.$$

显然，球面 S 的方程为

$u^2 + v^2 + w^2 = 1$ 或 $v^2 + w^2 = (\sqrt{1 - u^2})^2$.

若表示成参数式，则为

$u=u,\quad v=\sqrt{1-u^2}\cos\omega,\quad \omega=\sqrt{1-u^2}\sin\omega,$

其中 $-1\leqslant u\leqslant 1,\quad 0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$. 从而

$$dS=\sqrt{EG-F^2}dud\omega$$

$$=\sqrt{\frac{1}{1-u^2}\cdot(1-u^2)-0}dud\omega=dud\omega.$$

于是，最后得

$$\iint_S f(ax+by+cz)dS=\iint_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})dS$$

$$=\int_0^{2\pi}d\omega\int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du$$

$$=2\pi\int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^3+b^2+c^2})du.$$

4352. 求抛物面壳

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ (0\leqslant z\leqslant 1)$$

的质量，此壳的密度按规律 $\rho=z$ 而变更.

解 质量为

$$M=\iint_S\rho dS=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}z\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}d(r^2)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{5}(1+r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}.$$

4353. 求密度为 ρ_0 的均匀球壳

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z \geqslant 0)$$

对于 Oz 轴的转动惯量.

解 转动惯量为

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\rho_0 dS$$

$$= \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} (x^2+y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dxdy$$

$$= a\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}} dr$$

$$= 2\pi a^4 \rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi a^4 \rho_0.$$

4354. 求密度为 ρ_0 的均匀锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \ (0 \leqslant z \leqslant b)$$

对于直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$$

的转动惯量

解 设 (x,y,z) 为均匀锥面壳上的任一点,它到直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$$

的距离为

$|d| =$

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-0 & z-b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z-b & x-0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-0 & y & 0 \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+y^2}.$$

又因

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

于是,所求的转动惯量为

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+y^2\right]$$

$$\cdot \rho_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} dxdy$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}\rho_0}{a}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[\left(\frac{b}{a}r-b\right)^2\right.$$

$$\left. + r^2\sin^2\varphi\right] dr$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}\rho_0}{a}\left[2\pi a^2 b^2\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi a^4}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi a\rho_0(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}.$$

4355. 求均匀的曲面

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

被曲面 $x^2+y^2=ax$ 所割下部分的重心的坐标.

解 质量为

$$M = \iint\limits_S \rho_0 dS = \sqrt{2}\rho_0 \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax} dxdy$$

$$= \sqrt{2}\rho_0\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi = \frac{\sqrt{2}\pi a^2\rho_0}{4}.$$

从而，重心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0 \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax} x\,dx\,dy$$

$$= \frac{4}{\pi a^2}\int_0^a x\,dx\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} dy$$

$$= \frac{8}{\pi a^2}\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,dx$$

$$= \frac{8}{\pi a^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}+t\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,dt^{*)}$$

$$= \frac{8}{\pi a}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,dt = \frac{a}{2}.$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\int_0^a dx\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} y\,dy = 0.$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0 \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax} z\,dx\,dy$$

$$= \frac{4}{\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} r^2\,dr$$

$$= \frac{8a}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{16a}{9\pi},$$

即重心的坐标为$\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{16a}{9\pi}\right)$.

*) 作变换 $t = x - \frac{a}{2}$.

4356. 求均匀曲面

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(x\geqslant 0; y\geqslant 0; x+y\leqslant a)$$

的重心的坐标.

解　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以，

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

由对称性知，重心的横坐标与纵坐标相等，即

$$x_0=y_0=\frac{\iint\limits_S xdS}{\iint\limits_S dS}=\frac{\int_0^a\int_0^{a-y}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy}{\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dydx}.$$

由于

$$\int_0^a\int_0^{a-y}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=a\int_0^a\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=a-y}dy$$

$$=a\left[\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}dy-\int_0^a\sqrt{2ay-2y^2}dy\right]$$

$$=a\left[\frac{\pi a^2}{4}-\sqrt{2}\cdot\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}\right]^{*)}$$

$$=\frac{\pi a^3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dydx$$

$$= a\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$$

$$= -4a^2\int_1^0 \frac{u}{(1+u^2)^2}\arcsin u du$$

$$= 2a^2\left(\frac{\arcsin u}{1+u^2}\Big|_1^0 - \int_1^0 \frac{du}{(1+u^2)\sqrt{1-u^2}}\right)$$

$$= 2a^2\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}\Big|_0^1\right]^{*)}$$

$$= \pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right),$$

故有

$$x_0 = y_0 = \frac{\frac{\pi a^3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

又由于

$$\iint_S z dS = \int_0^a\int_0^{a-x} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dydx$$

$$= a\int_0^a (a-x)dx = \frac{a^3}{2},$$

故有

$$z_0 = \frac{\iint_S z dS}{\iint_S dS} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1),$$

即重心的坐标为$\left(\frac{a}{2\sqrt{2}},\frac{a}{2\sqrt{2}},\frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)\right)$.

*）由定积分的几何意义知：

$$\int_0^a \sqrt{y(a-y)}dy = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{a}{2}\right)^2}dy$$

$$= \frac{\pi a^2}{8}.$$

* *）利用 1957 题的结果.

4357. 密度为 ρ_0 的均匀截锥面

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$,

$0 < b \leqslant r \leqslant a)$

以怎样的力吸引质量为 m 位于该曲面顶点的质点？

解 显然曲面顶点为原点 $O(0,0,0)$. 对应于半径 r 处取斜高为 ds 的锥面带，其面积为

$$dS = 2\pi r ds = 2\sqrt{2}\pi r dr.$$

它与顶点 O 处质量为 m 的质点的引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影显见为零，而在 Oz 轴上的射影为

$$dZ = \frac{km \cdot 2\sqrt{2}\pi r dr \rho_0}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$= \frac{k\pi m \rho_0 dr}{r}.$$

于是，截圆锥面吸引质量为 m 的质点（在顶点处）的引力在坐标轴上的射影分别为

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

$$Z = \int_b^a \frac{k\pi m \rho_0 dr}{r} = k\pi m \rho_0 \ln \frac{a}{b}.$$

4358. 求在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的密度为 ρ_0 的均匀球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的位，即：计算积分

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r},$$

式中

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

解 记 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. 由对称性知，在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的位，等于在点 $N_0(0,0,r_0)$ 的位. 由余弦定理知，球面上任一点(x,y,z)到点 N_0 的距离

$$r=\sqrt{a^2+r_0^2-2r_0a\cos\psi}\quad(0\leqslant\psi\leqslant\pi),$$

而球面带 $dS=2\pi a^2\sin\psi d\psi$. 于是，所求的位为

$$u=\iint\limits_S\frac{\rho_0 dS}{r}=2\pi a^2\rho_0\int_0^\pi\frac{\sin\psi d\psi}{\sqrt{a^2+r_0^2-2r_0a\cos\psi}}.$$

令 $u^2=a^2+r_0^2-2r_0a\cos\psi$，则

$$2udu=2r_0a\sin\psi d\psi,$$

即

$$\sin\psi d\psi=\frac{u}{r_0a}du.$$

从而，所求的位为

$$u=\frac{2\pi a\rho_0}{r_0}\int_{|a-r_0|}^{a+r_0}du$$

$$=\begin{cases}4\pi a\rho_0, & \text{当 } r_0<a,\\ \dfrac{4\pi a^2\rho_0}{r_0}, & \text{当 } r_0>a,\\ 4\pi a\rho_0, & \text{当 } r_0=a.\end{cases}$$

也即

$$u=4\pi\rho_0\min\left(a,\frac{a^2}{r_0}\right).$$

上述结果表明：若 M_0 点在球壳内，则位是个常量；若 M_0 在球壳外，则在该点球壳的位等于将球壳质量集中于球心的位；当 M_0 点从球壳内通过球面时位具有连续性，

从而当 M_0 点在球面上时，位也是个常量，且等于球内任一点的位.

4359. 计算

$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)dS,$$

式中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & \text{若 } x^2+y^2+z^2\leqslant 1;\\ 0, & \text{若 } x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

作出函数 $u=F(t)$ 的图形.

解 显然，平面

$$x+y+z=\pm\sqrt{3}$$

是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的两个切平面，于是，

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, \text{若 } |t|\leqslant\sqrt{3},\\ 0 \qquad \text{若 } |t|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

由方程组

$$\begin{cases}x+y+z=t,\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

得椭圆方程

$$x^2+y^2+[t-(x+y)]^2=1,$$

或

$$x^2+y^2+xy-t(x+y)=\frac{1-t^2}{2}, \qquad (1)$$

记该椭圆围成的区域为 Ω，则

$$F(t)=\iint\limits_{\Omega}\{1-x^2-y^2-[t-(x+y)]^2\}\sqrt{3}\,dxdy$$

$$=\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega}[1-t^2-2(x^2+y^2)-2xy$$

$$+ 2t(x+y)]dxdy.$$

作平移变换

$$x = x' + \frac{t}{3}, \quad y = y' + \frac{t}{3},$$

则方程(1)变为

$$x'^2 + y'^2 + x'y' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t^2}{3}\right), \qquad (2)$$

记相应的区域为 Ω'，而函数为

$$f = 1 - \frac{t^2}{3} - 2(x'^2 + y'^2) - 2x'y'.$$

于是，

$$F(t) = \sqrt{3}\iint_{\Omega'}[1 - \frac{t^2}{3} - 2(x'^2 + y'^2) - 2x'y']dx'dy'.$$

再作旋转变换

$$x' = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}},$$

则方程(2)变为椭圆的标准方程

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{t^2}{3}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{t^2}{3}}\right)^2} = 1. \qquad (3)$$

记相应的区域为 Ω''，而函数为

$$f = 1 - \frac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2).$$

于是，

$$F(t) = \sqrt{3}\iint_{\Omega''}[1 - \frac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2)]dx''dy''.$$

最后，作广义的极坐标变换，即

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}r\cos\varphi,$$

$$y'' = \sqrt{1-\frac{t^2}{3}}r\sin\varphi,$$

则有

$$F(t) = \left(1-\frac{t^2}{3}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1-\frac{t^2}{3}\right)(r-r^3)drd\varphi$$

$$= \left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\varphi = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2,$$

其中 $|t| \leqslant \sqrt{3}$，而当 $|t| > \sqrt{3}$，则有

$$F(t) = 0.$$

考虑函数 $u = F(t)(-\infty < t < +\infty)$. 我们有

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2\pi}{9}(3-t^2)t \qquad (|t| < \sqrt{3}).$$

当 $t = \sqrt{3}$ 时，u 的左导数 $= -\frac{2\pi}{9}(3-t^2)\Big|_{t=\sqrt{3}} = 0$，$u$ 的右导数显然为零(因为 $t \geqslant \sqrt{3}$ 时，$u \equiv 0$)，故 $t = \sqrt{3}$ 时 u 的导数存在且等于零. 同理可证，$t = -\sqrt{3}$ 时，u 的导数也存在且等于零. 于是，曲线 $u = F(t)$ 在 $t = 0$ 处以及 $|t| \geqslant \sqrt{3}$ 的各 t 处切线都平行于 Ot 轴. 又 $t = 0$ 处达极大值 $u = \frac{\pi}{2}$，且为最大值.

由于

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{2\pi}{3}(1-t^2),$$

所以当 $t = \pm 1$ 时为拐点. 显然，图形关于 Ou 轴是对称的. 函数 $u = F(t)$ 的图形，如图 8.69 所示.

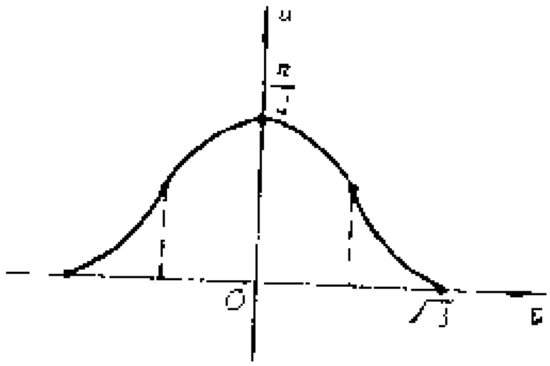

图 8.69

4360. 计算积分

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)dS,$$

式中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, 若\ z\geqslant\sqrt{x^2+y^2};\\ 0, 若\ z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

解 由 球面方程 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}},$$

而由

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=t^2,\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}$$

可得

$$x^2+y^2=\frac{t^2}{2}=\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

于是,积分

$$F(t)=\iint\limits_{x^2-y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)dS$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}(x^2+y^2)$$

$$\cdot\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}}dxdy$$

$$=|t|\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}drd\varphi.$$

因为

$$\int\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}dr=\frac{1}{2}\int\frac{t^2-r^2-t^2}{\sqrt{t^2-r^2}}d(t^2-r^2)$$

$$=\frac{1}{3}(t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-t^2\sqrt{t^2-r^2}+C,$$

所以

$$\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\frac{t^3}{\sqrt{t^2-r^2}}dr=\left[\frac{1}{3}(t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left.-t^2\sqrt{t^2-r^2}\right]\Bigg|_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{-5\sqrt{2}}{12}|t|^3+\frac{2}{3}|t|^3$$

$$=\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3.$$

于是,最后得

$$F(t)=|t|\int_0^{2\pi}\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3d\varphi$$

$$=\frac{(8-5\sqrt{2})\pi}{6}t^4.$$

4361. 计算积分

$$F(x,y,z,t)=\iint_S f(\xi,\eta,\zeta)dS,$$

其中 S 是变球

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2,$$

且假定 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$,

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases}1, 若\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2;\\0, 若\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2.\end{cases}$$

解　记 $x^2+y^2+z^2=r^2$. 旋转坐标轴，使点 $P(x,y,z)$ 位于 Oy 轴的正方向上的点 $P_0(0,0,r)$，如图 8.70 所示.

显然，当 $0<t\leqslant r-a$ 及 $t\geqslant r+a$ 时，整个球面上的点满足 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2$，此时 $f(\xi,\eta,\zeta)=0$. 从而，积分 $F(x,y,z,t)=\iint_S f(\xi,\eta,\zeta)dS=0$. 当 $r-a<t<r+a$ 时，则 $F(x,y,z,t)=\iint_{S'}dS'$,

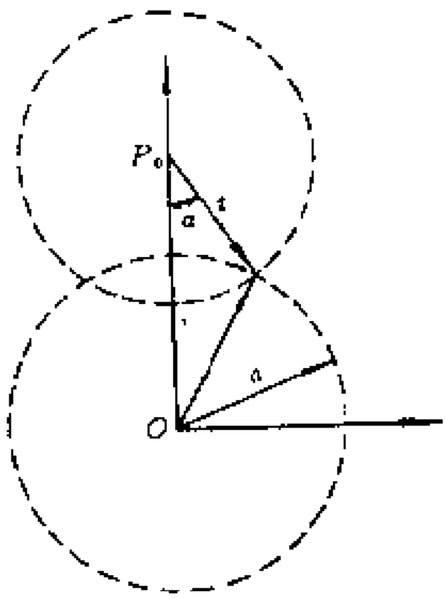

图　8.70

其中 S' 为 S 位于 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2$ 内的部分. 从而，我们有

$$\begin{aligned}F(x,y,z,t)&=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}t^2\sin\theta d\theta\\&=2\pi t^2(1-\cos\alpha)\end{aligned}$$

$$= 2\pi t^2\left(1 - \frac{t^2 + r^2 - a^2}{2rt}\right)$$

$$= \frac{\pi t}{r}[a^2 - (r - t)^2].$$

计算下列第二型曲面积分：

4362. $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$，式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外表面.

解 根据轮换对称，只要计算 $\iint\limits_S zdxdy$. 注意到上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 应取上侧，下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 应取下侧，则有

$$\iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

$$- \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}dr = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

于是，积分

$$\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy = 3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3.$$

4363. $\iint\limits_S f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy$，式中 $f(x)$，$g(y)$，$h(z)$ 为连续函数，S 为平行六面体 $0 < x < a$；$0 < y < b$；$0 < z < c$ 的外表面.

解 只要计算任何一个积分，其它两个可类似地写出

结果. 例如，下面计算 $\iint_S h(z)dxdy$. 由于六面体有四个面垂直于 Oxy 平面，故面积分应为零. 从而

$$\iint_S h(z)dxdy = \iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant a}} h(c)dxdy - \iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant a}} h(0)dxdy$$

$$= abc \cdot \frac{h(c)-h(0)}{c}.$$

类似地，可得到 $\iint_S f(x)dxdz$ 及 $\iint_S g(y)dxdz$ 的值. 于是，所求的积分为

$$\iint_S f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy$$

$$= abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(0)}{b} + \frac{h(c)-h(0)}{c}\right].$$

4364. $\iint_S (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$，式中 S 为圆锥曲面 $x^2+y^2=z^2\quad(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外表面.

解 方法一：

记 S_1、S_2 分别为锥面的底面和侧面，而 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为锥面外法线的方向余弦. 一方面，我们有

$$\iint_{S_1} (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant h^2} (x-y)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r^2(\cos\varphi - \sin\varphi)dr$$

$$= \frac{h^3}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi = 0.$$

另一方面，在侧面 S_2 上，对于任一点(x,y,z)，有

$$\frac{\cos\alpha}{x} = \frac{\cos\beta}{y} = \frac{\cos\gamma}{-z},$$

从而，dS 在各坐标面上的射影分别为

$$\cos\gamma dS = -d\sigma_{xy},$$

$$\cos\alpha dS = -\frac{x}{z}\cos\gamma dS = \frac{x}{z} = d\sigma_{xy},$$

$$\cos\beta dS = -\frac{y}{z}\cos\gamma dS = \frac{y}{z}d\sigma_{xy}.$$

于是，

$$\iint\limits_{S_2}(y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{S_2}[(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma]dS$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\left[\frac{x}{z}(y-z) + \frac{y}{z}(z-x) - (x-y)\right]d\sigma_{xy}$$

$$= -2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x-y)dxdy = 0.$$

综上所述，我们得

$$\iint\limits_{S}(y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} = 0.$$

方法二：

记曲面 S 在各坐标面的射影域分别为 S_{xy}，S_{yz}，和 S_{zx}. 于是，

$$\iint_S (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$$

$$= \iint_S (y-z)dydz + \iint_S (z-x)dxdz + \iint_S (x-y)dxdy$$

$$= \left[\iint_{S_{yz}} (y-z)dydz - \iint_{S_{yz}} (y-z)dydz\right] + \left[\iint_{S_{zx}} (z-x)dxdz - \iint_{S_{zx}} (z-x)dxdz\right] + \left[\iint_{S_{xy}} (x-y)dxdy - \iint_{S_{xy}} (x-y)dxdy\right]$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0.$$

4365. $\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdy}{z}$，式中 S 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面.

解 根据轮换对称，只要计算一个积分. 例如，计算 $\iint_S \frac{dxdy}{z}$. 利用广义极坐标，即得

$$\iint_S \frac{dxdy}{z} = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy - \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \frac{-1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy$$

$$= \frac{2}{c}\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy$$

$$= \frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr$$

$$= \frac{4\pi ab}{c}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]\Big|_0^1 = 4\pi \cdot \frac{ab}{c}.$$

于是,我们有

$$\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdy}{z}$$

$$= 4\pi\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{abc}(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2).$$

4366. $\iint_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$,式中 S 为球壳

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (x-c)^2 = R^2$$

的外表面.

解 根据轮换对称,只要计算 $\iint_S z^2dxdy$.

注意到

$$z - c = \pm\sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}.$$

并利用极坐标,即得

$$\iint_S z^2dxdy = \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}$$

$$[c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2dxdy$$

$$- \iint_{(x-a)^2-(y-b)^2\leqslant R^2}$$

$$[c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}dxdy$$

$$= 4c \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}$$

$$\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dxdy$$

$$=4c\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,rdr$$

$$=8\pi c\left(-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^R=\frac{8}{3}\pi R^3c.$$

于是,我们有

$$\iint_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$$

$$=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

§15. 斯托克斯公式

若 $P=P(x,y,z)$,$Q=Q(x,y,z)$,$R=R(x,y,z)$ 为连续可微分的函数,C 为包围逐片光滑的有界双面曲面 S 的简单封闭逐段光滑的围线,则有斯托克斯公式:

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS,$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的法线的方向余弦,此法线的方向是这样的,围线 C 环绕着它依反时针方向(对于右旋坐标系)而回转。

4367. 应用斯托克斯公式,计算曲线积分

$$\oint_C ydx+zdy+xdz,$$

式中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$,$x+y+z=0$,若从 Ox 轴的正向看去,这圆周是依反时针方向进行的.

用直接计算法检验结果.

解　平面 $x+y+z=0$ 的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

于是，

$$\oint_C ydx+zdy+xdz$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS$$

$$=-\pi a^2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

下面用直接计算法检验结果. 由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$$

消去 z，即得曲线 C 在 Oxy 平面上的射影

$$x^2+y^2+xy=\frac{a^2}{2}.$$

作旋转变换

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},$$

则方程化为

$$3x'^2+y'^2=a^2.$$

因而，曲线 C 的参数方程可取为

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right),$$

$$y=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+\sin t\right),$$

$$z=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\right)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

于是，曲线积分为

$$\oint_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+\sin t\right)\left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right)\right.$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right)$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right)\right]dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}(-\sqrt{3})\cdot 2\pi=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

可见，两种计算法结果一样.

4368. 计算积分

$$\int_{AmB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz,$$

此积分是从点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,0,h)$ 沿着螺线

$$x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=\frac{h}{2\pi}\varphi$$

上所取的.

解 连接 A,B 两点得线段 AB，它与 AmB 组成封闭曲线并依正向进行，则由斯托克斯公式知：

$$\oint_{AmBA}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\iint_S 0\,dydz+0\,dxdz+0\,dxdy=0.$$

于是,

$$\int_{AmB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\int_{AB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\int_0^h z^2dz^{*)}=\frac{h^3}{3}.$$

*) 在线段 AB 上,$x=a,y=0,dx=dy=0$,而 $0\leqslant z\leqslant h$.

4369. 设C为位于平面$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$($\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 为平面之法线的方向余弦)上并包围面积为 S 的封闭围线,求

$$\oint_C\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix},$$

其中围线C是依正方向进行的.

解 若记

$$P=\begin{vmatrix}\cos\beta & \cos\gamma\\ y & z\end{vmatrix}=z\cos\beta-y\cos\gamma,$$

$$Q=\begin{vmatrix}\cos\gamma & \cos\alpha\\ z & x\end{vmatrix}=x\cos\gamma-z\cos\alpha$$

$$R=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ x & y\end{vmatrix}=y\cos\alpha-x\cos\beta,$$

则得

$$\oint_C\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}=\oint_C Pdx+Qdy+Rdz$$

$$= \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= 2\iint\limits_S (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)dS = 2\iint\limits_S dS = 2S.$$

应用斯托克斯公式，计算积分：

4370. $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$，式中$C$为依参数$t$增大的方向通过的椭圆 $x = a\sin^2 t, y = 2a\sin t \cdot \cos t, z = a\cos^2 t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

解 $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$

$$= \iint\limits_S 0dydz + 0dxdz + 0dxdy = 0.$$

4371. $\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$，式中$C$为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 (a > 0, h > 0)$，若从$Ox$轴正向看去，此椭圆是依反时针方向进行的.

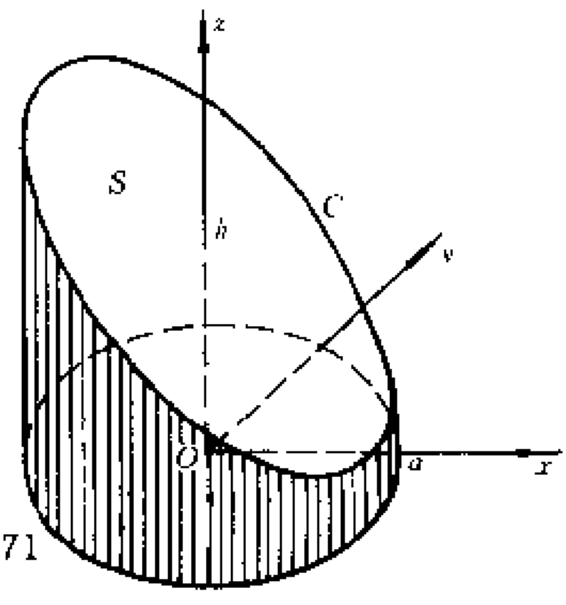

图 8.71

解 椭圆如图8.71所示.把平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$上$C$所包围的区域记为$S$,则$S$的法线方向为$\{h,0,a\}$.注意到$S$的法线方向和曲线$C$的方向是正向联系的,即得

$$\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=-2\iint_S dydz+dxdz+dxdy$$

$$=-2(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma)\iint_S dS$$

$$=-2\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+b^2}}+0+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\cdot\pi a\sqrt{a^2+h^2}$$

$$=-2\pi a(a+h).$$

4372. $\oint_C (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$,式中$C$是曲线$x^2+y^2+z^2=2Rx,x^2+y^2=2rx(0<r<R,z>0)$,此曲线是如下进行的:由它所包围在球$x^2+y^2+z^2=2Rx$外表面上的最小区域保持在左方.

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R},\cos\beta=\frac{y}{R},\cos\gamma=\frac{z}{R},$$

即得

$$\oint_C (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=2\iint_S[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]dS$$

$$=2\iint_S\left[(y-z)\left(\frac{x}{R}-1\right)+(z-x)\frac{y}{R}\right.$$

$$+(x-y)\frac{z}{R}\Big]dS$$

$$=2\iint_S (z-y)dS.$$

由于曲面 S 关于 Oxy 平面对称，故 $\iint_S ydS=0$.

又

$$\iint_S zds=\iint_s R\cos\gamma dS=R\cdot\pi r^2,$$

于是，

$$\oint_C (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=2\pi Rr^2.$$

4373. $\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，式中 C 为用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 切立方体 $0<x<a,0<y<a,0<z<a$ 的表面所得的切痕. 若从 Ox 轴的正向看去，是依反时针前进的方向的.

解 平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 含于立方体内的部分记为 S，它在 Oxy 平面上的射影域记为 S_{xy}，其面积显然等于 $\frac{3}{4}a^2$. 当平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 取上侧时，法线方向的单位矢量为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 于是，由斯托克斯公式知

$$\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_S\Big[(-2y-2z)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2z-2x)\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$+(-2x-2y)\frac{1}{\sqrt{3}}\Big\}dS$$

$$=-4\iint_S(x+y+z)\frac{1}{\sqrt{3}}dS$$

$$=-6a\iint_S\frac{1}{\sqrt{3}}dS=-6a\iint_{S_{xy}}dxdy$$

$$=-6a\cdot\frac{3}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$$

4374. $\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$，式中$C$为依参数$t$增大的方向进行的封闭曲线$x=a\cos t, y=a\cos 2t, z=a\cos 3t$.

解 取S为由参数方程

$$x=u\cos t, y=u\cos 2t, z=u\cos 3t$$

$$(0\leqslant u\leqslant a, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

表示的曲面，则所给曲线C为曲面S的边界.

于是，根据斯托克斯公式，有

$$\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$$

$$=2\iint_S x^2(y-z)dydz+y^2(z-x)dzdx$$

$$+z^2(x-y)dxdy$$

$$=\pm 2\int_0^{2\pi}\int_0^a[u^2\cos^2t(u\cos 2t-u\cos 3t)$$

$$(y_u'z_t'-y_t'z_u')+u^2\cos^2 2t(u\cos 3t-u\cos t)$$

$$\cdot(z_u'x_t'-z'_tx'_u)+u^2\cos^2 3t(u\cos t-u\cos 2t)$$

$$\cdot(x_u'y_t'-x'_ty'_u)]dudt$$

$$=\pm 2\int_0^a u^4du\int_0^{2\pi}[\cos^2t(\cos 2t-\cos 3t)$$

$$\cdot(2\sin 2t\cos 3t-3\cos 2t\sin 3t)+\cos^2 2t(\cos 3t-\cos t)$$

$$\cdot (3\sin 3t\cos t - \sin t\cos 3t) + \cos^2 3t(\cos t - \cos 2t)$$

$$\cdot (\sin t\cos 2t - 2\sin 2t\cos t)]dt$$

$$= \pm \frac{2}{5}a^5\int_{-\pi}^{\pi}[\cos^2 t(\cos 2t - \cos 3t)(2\sin 2t\cos 3t$$

$$- 3\cos 2t\sin 3t) + \cos^2 2t(\cos 3t - \cos t)$$

$$\cdot (3\sin 3t\cos t - \sin t\cos 3t) + \cos^2 3t(\cos t - \cos 2t)$$

$$\cdot (\sin t\cos 2t - 2\sin 2t\cos t)]dt = 0,$$

上式中正负号应这样选取，使得 S 的侧正好配合 C 的方向（t 增大的方向），积分 $\int_0^{2\pi}$ 可以换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 是因为被积函数（t 的函数）是周期为 2π 的函数，而 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 等于零是因为被积函数为奇函数.

注：本题若不用斯托克斯公式，而直接计算线积分，则较为简单：

$$\oint_C y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz$$

$$= -\int_0^{2\pi}a^5(\cos^2 2t\cos^2 3t\sin t + 2\cos^2 t\cos^2 3t\sin 2t$$

$$+ 3\cos^2 t\cos^2 2t\sin 3t)dt$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi}a^5(\cos^2 2t\cos^2 3t\sin t + 2\cos^2 t\cos^2 3t\sin 2t$$

$$+ 3\cos^2 t\cos^2 2t\sin 3t)dt$$

$$= 0,$$

$\int_0^{2\pi}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 及 $\int_{-\pi}^{\pi} = 0$ 的理由同上.

4375. 有函数

$$W(x,y,z) = ki\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS \quad (k = \text{常数}),$$

其中 S 为由围线 C 所界的面积，$\vec{n}$ 为曲面 S 的法线，$\vec{r}$ 为

连接空间的点 $M(x,y,z)$ 与曲面 S 上的动点 $A(\xi,\eta,\zeta)$ 所成之矢径，证明此函数为通过围线 C 的电流 i 所产生磁场 $\vec{H}$ 的位势(参阅 4340 题)。

证　利用 4340 题指出的定律，并注意到

$$\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k},$$

其中 $\vec{r}=(\xi-x)\vec{i}+(\eta-y)\vec{j}+(\zeta-z)\vec{k}$，即得

$$\vec{H}=ki\oint_C\frac{\vec{r}\times d\vec{s}}{r^3}$$

$$=ki\Big(\Big(\oint_C\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta\Big)\vec{i}$$

$$+\Big(\oint_C\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta\Big)\vec{j}$$

$$+\Big(\oint_C\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi\Big)\vec{k}.$$

利用斯托克斯公式，并注意到

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi},\quad\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta}$$

及 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$，从而

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$=-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

即得

$$H_x=ki\oint_C\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta$$

$$= ki \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta\partial y} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta\partial z} \right)\vec{i} - \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial y}\vec{j} \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial z}\vec{k} \right] \cdot \vec{n} ds$$

$$= ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\vec{k} \right] \cdot \vec{n} dS$$

$$= ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^2} dS = ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS.$$

同理，

$$H_y = ki \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS,$$

$$H_z = ki \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS.$$

于是，最后得

$$\vec{H} = \frac{\partial W}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\vec{k},$$

即函数 $W(x,y,z)$ 是磁场 $\vec{H}$ 的位势.

§ 16. 奥斯特洛格拉德斯基公式

若 S 为包含体积 V 的逐片光滑曲面，$P = P(x,y,z)$，$Q = Q(x,y,z)$，$R = R(x,y,z)$ 和它们的一阶偏导函数均为域 $V + S$ 内的连续函数，则奥斯特洛格拉德斯基公式真确：

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

式中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦。

应用奥斯特洛格拉德斯基公式以变换下列曲面积分，设光滑的曲

面 S 包围着有界的体积 V，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦．

4376. $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$.

解 由于 $P=x^3,Q=y^3,R=z^3$. 从而

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2).$$

于是，

$$\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$$

$$=3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

4377. $\iint\limits_S xydxdy+xzdxdz+yzdydz$.

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

故得

$$\iint\limits_S xydxdy+xzdxdz+yzdydz$$

$$=\iiint\limits_V 0dxdydz=0.$$

4378. $\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$.

解 由于

$$P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$R=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

从而

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

于是，

$$\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$$

$$=2\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

4379. $\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS.$

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u,$$

故得

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$$

$$=\iiint\limits_V \Delta u\,dxdydz.$$

4380. $\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right.$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS.$$

解 记

$$P^*=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\quad Q^*=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$R^*=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y},$$

则易知：

$$\frac{\partial P^*}{\partial x}+\frac{\partial Q^*}{\partial y}+\frac{\partial R^*}{\partial z}=0.$$

于是,原面积分等于零.

4381. 证明:若S为封闭的简单曲面而$\vec{l}$为任何的固定方向,则

$$\iint\limits_S \cos(\vec{n},\vec{l})dS=0,$$

式中$\vec{n}$为曲面S的外法线.

证 因为

$$\cos(\vec{n},\vec{l})=\cos\alpha\cos(\vec{l},x)+\cos\beta\cos(\vec{l},y)+\cos\gamma\cos(\vec{l},z),$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为$\vec{n}$的方向余弦,故有

$$\iint\limits_S \cos(\vec{n},\vec{l})dS=\iint\limits_S \cos(\vec{l},x)dydz+\cos(\vec{l},y)dxdz+\cos(\vec{l},z)dxdy.$$

由于$\vec{l}$为固定方向,从而$\cos(\vec{l},x),\cos(\vec{l},y),\cos(\vec{l},z)$均为常数.于是,

$$\iint\limits_S \cos(\vec{n},\vec{l})dS=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial\cos(\vec{l},x)}{\partial x}+\frac{\partial\cos(\vec{l},y)}{\partial y}+\frac{\partial\cos(\vec{l},z)}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_V 0dxdydz=0.$$

4382. 证明:由曲面S所包围的体积等于

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS,$$

式中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面$S$的外法线的方向余弦.

证 由奥氏公式,有

$$\iint_C (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS$$
$$= \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dxdydz$$
$$= \iiint_V 3dxdydz = 3V,$$

由此可知

$$V = \frac{1}{3}\iint_V (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS.$$

证毕.

4383. 证明，由平滑的圆锥曲面 $F(x,y,z)=0$ 和平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 所包围的锥体体积等于

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

式中 S 为位于已知平面上的锥底之面积，H 为锥的高.

证 方法一：

不失一般性，设坐标原点位于圆锥曲面 $F(x,y,z)=0$ 的顶点。于是 $F(x,y,z)$ 是 x,y,z 的二次齐次函数. 因此，根据尤拉定理知

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = 2F(x,y,z) \qquad (1)$$

由 4382 题的结果，有

$$V = \frac{1}{3}\iint_{S+S_1} (\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS$$
$$= \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS$$

$$+\frac{1}{3}\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS, \tag{2}$$

其中S为锥底(位于平面$Ax+By+Cz+D=0$上),而S_1是圆锥的侧面.在锥面S_1(即$F(x,y,z)=0$)上,有

$$\cos\alpha=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\beta-\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\gamma=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.$$

于是,注意到(1)式,即知在S_1上有

$$\begin{aligned}&x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\\&=\frac{xF'_x+yF'_y+zF'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}\\&=\frac{2F(x,y,z)}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=0,\end{aligned}$$

从而

$$\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=0. \tag{3}$$

又在平面$Ax+By+Cz+D=0$上,有

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\vec{r}\cdot\vec{n}=H,$$

其中$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$是从原点(0,0,0)到点$(x,y,z)$的矢径,$\vec{n}$为平面(锥底)的外法线单位向量,$H$为从原点到平面的距离(即锥的高).于是,

$$\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS$$
$$= H\iint_S dS = HS.$$

由此，再注意到(2)式与(3)式，即得 $V = \frac{1}{3}SH$.

方法二：

取坐标系 $Ox'y'z'$，使圆锥的顶点在坐标原点，$Ox'y'$ 平面平行于圆锥的底面，由于在 z 处的圆锥的截面面积

$$S(z) = \frac{Sz'^2}{H^2}$$

故所求的体积为

$$V = \int_0^H S(z')dz'$$
$$= \int_0^H \frac{S}{H^2}z'dz' = \frac{1}{3}SH.$$

4384. 求由曲面：$z = \pm c$ 及

$$x = a\cos u\cos v + b\sin u\sin v,$$
$$y = a\cos u\sin v - b\sin u\cos v,$$
$$z = c\sin u$$

所界物体的体积.

解 方法一：

我们有

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u, \tag{1}$$

以 $z = c\sin u$ 代入得

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2}z^2 = a^2 \tag{2}$$

故所界物体由平面 $z = c$, $z = -c$ 及曲面(2)围成. 利用

4382 题的结果，即知所求的体积为

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{S_1+S_2+S_3}(x\cos\alpha + y\cos\beta$$

$$+ z\cos\gamma)dS, \tag{3}$$

其中 S_1, S_2 分别是平面 $z=c, z=-c$ 上的部分（此时 $u=\frac{\pi}{2}, u=-\frac{\pi}{2}$，从而 $x^2+y^2=b^2$，故 S_1, S_2 为圆盘 $x^2+y^2\leqslant b^2$），S_3 表曲面(2)的部分，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 表外法线的方向余弦. 显然，在 S_1 上，$\cos\alpha=\cos\beta=0, \cos\gamma=\frac{c}{|c|}$. 于是，

$$\iint\limits_{S_1}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS = \iint\limits_{S_1}\frac{c^2}{|c|}dS$$

$$= |c|\pi b^2.$$

同理可得

$$\iint\limits_{S_2}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS = |c|\pi b^2.$$

此外

$$\iint\limits_{S_3}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS$$

$$= \iint\limits_{S_3} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$$

$$= \pm\int_0^{2\pi}dv\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(a\cos u\cos v + b\sin u\sin v)$$

$$\cdot(y'_u z'_v - y'_v z'_u)$$

$$-(a\cos u\sin v - b\sin u\cos v)(z'_u x'_v - z'_v x'_u)$$

$$+ c\sin u(x'_u y'_v - x'_v y'_u)]du$$

$$= \pm \int_0^{2\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ca^2 \cos u du = \pm 4\pi ca^2, \qquad (4)$$

其中的正负号应这样选取，使对应于 S_3 的外侧. 下面确定此正负号. 由(2)，S_3 的方程可写为 $F(x,y,z) = a^2$，其中 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2$ 是二次齐次函数. 于是，在 S_3 上，有

$$\cos\alpha = \frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

$$\cos\beta = \frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

$$\cos\gamma = \frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

其中正号对应于 S_3 的一侧，负号对应于 S_3 的另一侧. 于是，根据齐次函数的尤拉定理，在 S_3(外侧) 上有

$$\begin{aligned} & x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \\ = & \frac{xF'_x + yF'_y + zF'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} \\ = & \frac{2F}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} \\ = & \frac{2a^2}{\pm\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}. \end{aligned} \qquad (5)$$

但在 S_3 与 Oxy 平面的交线(即 $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$) 的各点上，对 S_3 的外侧，显然有(注意到曲面(2) 关于 Oxy 坐标平面对称)

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \vec{r} \cdot \vec{n} > 0,$$

（这是因为此时向径$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$与外法线单位向量$\vec{n}$的方向一致），由此可知，在(5)式中应取正号，于是

$$\iint_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{S}\frac{2a^2}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}dS>0.$$

从而，由(4)式知

$$\iint_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=4\pi|c|a^2.$$

综上所述，最后得（注意(3)式）

$$V=\frac{1}{3}(4\pi|c|a^2+|c|\pi b^2+|c|\pi b^2)$$

$$=\frac{4\pi}{3}(a^2+\frac{b^2}{2})|c|.$$

方法二：

不用面积分求体积的公式(3)，而直接计算体积较为简单．由(1)式知，平面$z=$常数（即$u=$常数）与曲面(2)的截面$S(z)$是圆，故所求的体积为

$$V=\int_{-c}^{c}dz\iint_{S(z)}dxdy=\int_{-c}^{c}S(z)dz$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi(a^2\cos^2u+b^2\sin^2u)|c|d(\sin u)$$

$$=|c|\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^2+(b^2-a^2)\sin^2u]d(\sin u)$$

$$=\pi|c|[2a^2+\frac{2}{3}(b^2-a^2)]$$

$$=\frac{4\pi}{3}(a^2+\frac{b^2}{2})|c|.$$

4385. 求由曲面

$x = u\cos v, y = u\sin v, z = -u + a\cos v \quad (u \geqslant 0)$

及平面 $x = 0, z = 0(a > 0)$ 所界物体的体积.

解 方法一:

用 S_1 表物体表面位于平面 $z = 0$ 上的那一部分，S_2 为物体表面由所给参数方程给出的曲面上那一部分，此外，物体表面在平面 $x = 0$ 上的那部分显然是一线段 $x = 0, y = 0, 0 \leqslant z \leqslant a$. 于是，利用 4382 题的结果，即知所求体积为

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{S_1+S_2}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS, \tag{1}$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是向外法线的方向余弦. 显然，在 S_1 上，$\cos\alpha = 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = -1, z = 0$，故

$$\iint\limits_{S_1}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS = 0. \tag{2}$$

另外，我们有

$$\iint\limits_{S_2}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS$$

$$= \iint\limits_{S_2} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$= \pm \iint\limits_{D}[u\cos v(y'_u z'_v - y'_v z'_u)$$

$$+ u\sin v(z'_u x'_v - z'_v x'_u)$$

$$+ (-u + a\cos v)(x'_u y'_v - x'_v y'_u)]dudv$$

$$= \pm \iint\limits_{D}[u\cos v(u\cos v - a\sin^2 v)$$

$$+ u\sin v(a\sin v\cos v + u\sin v)$$

$$+ (-u + a\cos v)u]dudv$$

$$= \pm \iint_D au\cos v dudv = \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a\cos v} au\cos v du$$

$$= \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}a^3\cos^3 v \right) dv = \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3(1 - \sin^2 v)d(\sin v)$$

$$= \pm a^3\left(\sin v - \frac{\sin^3 v}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pm \frac{2}{3}a^3,$$

其中的正负号应这样选取，使对应于 S_2 的外侧，D 为 u，v 的变化区域（对应于 S_2）. 由此，再注意到(1) 式与(2) 式，即得 $V = \pm \frac{2}{9}a^3$. 但体积恒为正($V > 0$) 故必有 $V = \frac{2}{9}a^3$.

方法二：

本题若不利用面积分计算体积的公式(1)，而直接计算体积，则较为简单（下面 Ω 表物体在 Oxy 平面上的投影）：

$$V = \iint_\Omega zdxdy = \iint_D (-u + a\cos v)$$

$$\cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv$$

$$= \iint_D (-u + a\cos v)ududv$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a\cos v} (-u + a\cos v)udu$$

$$= \frac{a^3}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 v)d(\sin v) = \frac{2}{9}a^3.$$

4386. 证明公式

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)dxdydz\right\}$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)dS$$

$$+ \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t}dxdydz \quad (t>0).$$

证 证法一

作变量代换 $x=tu, y=tv, z=tw$ ($t>0$ 固定)，则 (利用奥氏公式)

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)dxdydz\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3 f(tu,tv,tw,t)dudvdw\right\}$$

$$= \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left[t^3\left(\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial y}v+\frac{\partial f}{\partial z}w\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial f}{\partial t}\right)+3t^2 f\right]dudvdw$$

$$= \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3\left\{\frac{1}{t}\left[\frac{\partial}{\partial x}(fx)+\frac{\partial}{\partial y}(fy)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial z}(fz)\right]\right\}dudvdw$$

$$+ \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3\frac{\partial f}{\partial t}dudvdw$$

$$= \frac{1}{t} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} \left[\frac{\partial}{\partial x}(fx) + \frac{\partial}{\partial y}(fy) + \frac{\partial}{\partial z}(fz) \right] dxdydz + \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dxdydz$$

$$= \frac{1}{t} \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} (fx\cos\alpha + fy\cos\beta + fz\cos\gamma) dS + \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dxdydz \ (t > 0).$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为球面$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$上向外法线的方向余弦. 显然

$$\cos\alpha = \frac{x}{t}, \cos\beta = \frac{y}{t}, \cos\gamma = \frac{z}{t},$$

故

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} (fx\cos\alpha + fy\cos\beta + fz\cos\gamma) dS$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{t} dS$$

$$= t \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f dS.$$

于是,最后得

$$\frac{d}{dt}\left\{ \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f(x, y, z, t) dxdydz \right\}$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f dS$$

$$+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq t^2}\frac{\partial f}{\partial t}dxdydz\quad(t>0).$$

证法二

不利用奥氏公式更简单些. 采用球坐标, 我们有

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq t^2}f(x,y,z,t)dxdydz\right\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t\left[\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\varphi\cos\psi,r\sin\varphi\cos\psi,\right.\right.$$

$$\left.\left.r\sin\psi,t)r^2\cos\psi d\psi d\varphi\right]dr\right\}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(t\cos\varphi\cos\psi,t\sin\varphi\cos\psi,$$

$$t\sin\psi,t)t^2\cos\psi d\psi d\varphi$$

$$+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial t}f(r\cos\varphi\cos\psi,r\sin\varphi\cos\psi,$$

$$r\sin\psi,t)r^2\cos\psi d\psi d\varphi dr$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f(x,y,z,t)dS$$

$$+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq t^2}\frac{\partial f}{\partial t}dxdydz.$$

利用奥斯特洛格拉德斯基公式计算下列面积分：

4387. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, 式中 S 为立方体 $0<x<a,0<y<a,0<z<a$ 的边界的外表面.

解 $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$

$$=2\iiint\limits_V(x+y+z)dxdydz$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)dz$$

$$= 6\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a z dz = 3a^4.$$

4388. $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$，式中 S 为球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外表面.

解 $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$

$$= 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi\int_0^a r^4\cos\psi dr$$

$$= 6\pi\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\right)\left(\int_0^a r^4 dr\right) = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

4389. $\iint\limits_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dxdz + (z-x+y)\cdot dxdy$，式中 S 为曲面

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$$

的外表面.

解 $\iint\limits_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dxdz$

$$+ (z-x+y)dxdy$$

$$= \iiint\limits_V 3dxdydz,$$

其中 V 为由曲面 $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$ 围成的体积. 作变换

$$u = x-y+z, v = y-z+x, w = z-x+y,$$

则

$$\frac{D(u,v,\omega)}{D(x,y,z)}=4,$$

且由 $|u|+|v|+|\omega|=1$ 围成的体积等于 $\frac{4}{3}$. *) 于是，所求的积分

$$\iint\limits_{S}(x-y+z)dydz+(y-z+x)dxdz$$
$$+(z-x+y)dxdy$$
$$=\iiint\limits_{|u|+|v|+|\omega|\leqslant1}3\cdot\frac{1}{4}dudvd\omega$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1.$$

*) 由 $|u|+|v|+|\omega|=1$ 围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积，其大小等于由平面 $u+v+\omega=1,u=1,v=0,\omega=0$ 所围成的四面体体积的 8 倍，即为 $8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{4}{3}$.

4390. 计算

$$\iint\limits_{S}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS,$$

式中 S 为圆锥曲面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的一部分，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦.

解 并合平面 $S_1: z=h,x^2+y^2\leqslant h^2$ 的部分得一立体 V，则(利用奥氏公式)

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$
$$=2\iiint\limits_{V}(x+y+z)dxdydz$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h [r(\cos\varphi + \sin\varphi) + z] dz$$

$$= 2\pi \int_0^h (rh^2 - r^3) dr = \frac{\pi h^4}{2}.$$

又因

$$\iint_{S_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma) dS$$

$$= h^2 \iint_{x^2+y^2 \leqslant h^2} dxdy = \pi h^4,$$

于是,

$$\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma) dS$$

$$= \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}.$$

4391. 证明公式

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS,$$

其中 S 为包围体积 V 的封闭曲面,$\vec{n}$ 为封闭曲面 S 上的动点 (ξ, η, ζ) 处的外法线,而

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

$\vec{r}$ 为从点 (x, y, z) 到点 (ξ, η, ζ) 的矢径.

证 先设曲面 S 不包围点 (x, y, z)(即点 (x, y, z) 在 V 之外),我们有

$$\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \cos(\vec{r}, x)\cos\alpha + \cos(\vec{r}, y)\cos\beta + \cos(\vec{r}, z)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 $\vec{n}$ 的方向余弦. 由于

$$\cos(\vec{r}, x) = \frac{\xi - x}{r}, \cos(\vec{r}, y) = \frac{\eta - y}{r},$$

$$\cos(\vec{r},z)=\frac{\zeta-z}{r},$$

故

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}$$

$$\cdot\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma.$$

于是，利用奥氏公式，得

$$\iint_S\cos(\vec{r},\vec{n})dS=\iint_S\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\right.$$

$$\left.\cdot\cos\beta+\frac{\zeta-z}{\gamma.}\cos\gamma\right)dS$$

$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]d\xi d\eta d\zeta$$

$$=\iiint_V\frac{2}{r}d\xi d\eta d\zeta,$$

故

$$\iiint_V\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint_S\cos(\vec{r},\vec{n})dS.$$

次设曲面 S 包围点 (x,y,z). 这时，不能对 V 应用奥氏公式，必须用一小区域将点 (x,y,z) 挖掉，即以点 (x,y,z) 为中心，ε 为半径作一开球域 V_ε(ε 充分小)，其边界(球面)以 S_ε 表示. 对闭域 $V-V_\varepsilon$ 应用奥氏公式，仿上可得

$$\iint_S\cos(\vec{r},\vec{n})dS+\iint_{S_\varepsilon}\cos(\vec{r},\vec{n})dS$$

$$= \iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi - x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta - y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta - z}{r}\right)\right] d\xi d\eta d\zeta$$

$$= 2\iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}.$$

但在 S_ε 上，$\vec{n}$ 的方向与 $\vec{r}$ 的方向相反，故 $\cos(\vec{r},\vec{n}) = -1$. 于是，

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \cos(\vec{r},\vec{n})dS = -4\pi\varepsilon^2.$$

由此可知，在前式中令 $\varepsilon \to +0$ 取极限，即得

$$\iiint\limits_{V} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \lim_{\varepsilon\to+0} \iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{S}\cos(\vec{r},\vec{n})dS.$$

证毕.

4392. 计算高斯积分

$$I(x,y,z) = \iint\limits_{S} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS,$$

式中 S 为包含体积 V 的简单封闭平滑曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ,η,ζ) 处的外法线，$\vec{r}$ 为连接点 (x,y,z) 和点 (ξ,η,ζ) 的矢径，

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

研究两种情形：(a) 当曲面 S 不包围点 (x,y,z)；(6) 当曲面 S 包围点 (x,y,z).

解 设法线 $\vec{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则

$$\cos(\vec{r},\vec{n}) = \cos(\vec{r},x)\cos\alpha + \cos(\vec{r},y)\cos\beta$$
$$+ \cos(\vec{r},z)\cos\gamma$$
$$= \frac{\xi - x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta - y}{r}\cos\beta + \frac{\zeta - z}{r}\cos\gamma.$$

因此，高斯积分

$$I(x,y,z) = \iint_S \frac{\xi - x}{r^3}d\eta d\zeta$$
$$+ \frac{\eta - y}{r^3}d\zeta d\xi + \frac{\zeta - z}{r^3}d\xi d\eta,$$

这里 $P = \frac{\xi - x}{r^3}, Q = \frac{\eta - y}{r^3}, R = \frac{\zeta - z}{r^3}$. 于是，

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\eta - y)^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\zeta - z)^2}{r^5}$$

它们仅在点 (x,y,z) 处不连续. 因此

(a) 当曲面 S 不包围点 (x,y,z) 时，则

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0.$$

于是，利用奥氏公式有

$$I(x,y,z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS = 0.$$

(б) 当曲面 S 包围点 (x,y,z) 时，则我们以点 (x,y,z) 为中心，ε 为半径作一球 V_ε 包围在 S 内，此球面记以 S_ε. 将奥式公式用于 $V - V_\varepsilon$ 上，

即得

$$\iint_{S+S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS = 0.$$

但因

$$\iint_{S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS = \iint_{S_\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)dS = -4\pi,$$

故得

$$I(x,y,z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS = 4\pi.$$

4393. 证明:若

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

及 S 为包围有界体积 V 的光滑曲面,则下列公式正确:

$$\text{(a)} \iint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_V \Delta u dxdydz;$$

$$\text{(б)} \iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

$$= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$$

$$+ \iiint_V u\Delta u dxdydz,$$

式中 u 和它的直到二阶的偏导函数是在域 $V+S$ 内连续的函数,$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的导函数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

因此,利用奥氏公式即得

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right.$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dxdydz$$

$$= \iiint_V \Delta u dxdydz.$$

(6) $$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_S \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + u \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + u \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dxdydz$$

$$= \iiint_V u \Delta u dxdydz + \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dxdydz.$$

4394. 证明空间的格林第二公式

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdydz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

式中体积 V 是由曲面 S 所包围的，$\vec{n}$ 是曲面 S 的外法线方向，而函数 $u = u(x,y,z)$，$v = v(x,y,z)$ 为域 $V + S$ 内可微分两次的函数.

证 $$\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint_S \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos\alpha + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos\beta \right.$$

$$+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\Big]dS$$

$$=\iiint\limits_V\Big[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Big]dxdydz$$

$$=\iiint\limits_V\Big[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$-u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\Big]dxdydz$$

$$=\iiint\limits_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdydz.$$

4395. 函数 $u=u(x,y,z)$ 在某一域内具有直到二阶的连续导函数，若

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

则 $u(x,y,z)$ 在这个域内称为调和函数.

证明：若 u 是被平滑曲面 S 所包围的有界闭域 V 内的调和函数，则下列公式是正确的.

(a) $\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$;

(б) $\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$

$$=\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS,$$

式中 $\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线.

试用公式(б)，证明在域 V 内的调和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定.

证 (a) 由于 $\Delta u=0$，故利用 4393 题(a) 的结果，即得

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_V 0dxdydz=0.$$

(б) 利用 4393 题(б) 的结果，即得

$$\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_V u\cdot 0dxdydz$$

$$+\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$$

$$=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz.$$

与 4333 题一样，只要证明：若在界限 S 上调和函数 $u=0$，则它在域 V 上也恒有 $u=0$. 事实上，利用本题(б)，得

$$\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz=0.$$

因此，

$$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv\frac{\partial u}{\partial y}\equiv\frac{\partial u}{\partial z}\equiv 0,$$

即在域 V 上 $u\equiv$ 常数. 但在 S 上 $u=0$，故在域 V 上 $u=0$. 这就是证明：在域 V 内的调和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定.

4396. 证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 是在由光滑曲面 S 所包围着的有界闭域 V 内的调和函数，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS,$$

式中 $\vec{r}$ 是从域 V 的内面的点 (x,y,z) 引至曲面 S 上的动点 (ξ,η,ζ) 的矢径，而

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

$\vec{n}$ 为曲面 S 上在点(ξ,η,ζ) 的外法线向量.

证 在 4394 题中令 $v = \frac{1}{r}$，则当$(\xi,\eta,\zeta) \neq (x,y,z)$时，有 $\Delta v = 0$. 现以点 $P(x,y,z)$ 为中心，ρ 为半径作一球面 S_ρ 含于曲面 S 内，再将 4394 题应用到由曲面 $S + S_\rho$ 所包围的体积 V 内，即得

$$\iint\limits_{S+S_\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS = 0,$$

或

$$\iint\limits_{S+S_\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS$$

$$= - \iint\limits_{S} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS.$$

显然，S 上的法线是向外的，而 S_ρ 上的法线是指向球心的，即指向半径减少一方. 因此，

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = - \left.\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r}\right|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho^2}.$$

于是，我们有

$$\iint\limits_{S_\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{u}{\rho^2} \right) dS = - \iint\limits_{S} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS.$$

但

$$\iint\limits_{S_\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\rho} \iint\limits_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

又利用中值定理，得

$$\iint\limits_{S_\rho} \frac{u}{\rho^2} dS = \frac{1}{\rho^2} u(x',y',z') \cdot 4\pi\rho^2$$

$$= 4\pi u(x',y',z'),$$

其中$u(x',y',z')$为函数u在球面S_ρ上某点之值．从而

$$u(x',y',z') = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) dS.$$

上式右端与ρ无关．而$\lim\limits_{\rho\to+0} u(x',y',z') = u(x,y,z)$．因而，令$\rho\to+0$，即得

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) dS.$$

又由于

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial r}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial r}{\partial \zeta}\cos\gamma\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\xi - x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta - y}{r}\cos\beta + \frac{\zeta - z}{r}\cos\gamma\right)$$

$$= -\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}.$$

故最后得

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(\frac{u\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS.$$

4397．证明，若$u = u(x,y,z)$为在以R为半径，以点(x_0,y_0,z_0)为球心的球S内的调和函数，则

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_S u(x,y,z) dS$$

(中值定理).

证 在球 S 上应用 4396 题的结果，即得

$$u(x_0,y_0,z_0)=\iint\limits_S\left(\frac{u\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{u}{R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

$$=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_S u(x,y,z)dS^{*)}.$$

*) 利用 4395 题的结果，有

$$\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}dS=0.$$

4398. 证明，在有界闭域 V 内连续且在其内部是调和的函数 $u=u(x,y,z)$，若它不是常数，则在域内的点函数不能达到最大和最小的值(极大值原则).

证 证明与 4337 题(平面情形)完全类似. 设有界闭域为 $\overline{\Omega}$，它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明：如果 $u(x,y,z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 达到其最大值或最小值(例如，设达到最大值)，则 $u(x,y,z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上必为常数，下分三步证明：

(1) 先证：若球域 $V_\rho=\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant\rho^2\}$ 完全属于 Ω，则 $u(x,y,z)$ 在 V_ρ 上必为常数.

对任何的 $0<r\leqslant\rho$，用 S_r 表球面 $\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2\}$. 由 4397 题的结果知

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r}u(x,y,z)dS,$$

故

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}[u(x_0,y_0,z_0)$$

$$-u(x,y,z)]dS=0, \tag{1}$$

但因 $u(x_0,y_0,z_0)$ 是最大值，故在 S_r 上恒有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\geqslant 0.$$

由此，根据(1)，即易知在 S_r 上 $u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\equiv 0$. 因为，若有某点 $(x_1,y_1,z_1)\in S_r$ 使

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x_1,y_1,z_1)=\tau>0,$$

则由 $u(x,y,z)$ 的连续性知，必有以 (x_1,y_1,z_1) 为中心的某小球域 σ 存在，使当 $(x,y,z)\in\sigma$ 时，恒有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\geqslant\frac{\tau}{2}.$$

用 S'_r 表 S_r 含于 σ 内的部分，则

$$\iint_{S_r}[u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)]dS$$

$$\geqslant\iint_{S'_r}[u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)]dS$$

$$\geqslant\iint_{S'_r}\frac{\tau}{2}dS=\frac{1}{2}\tau D_r>0,$$

其中 D_r 表 S'_r 的面积，此显然与(1)式矛盾. 于是，在 S_r 上有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\equiv 0.$$

再根据 r 的任意性 $(0<r\leqslant\rho)$，即知对任何 $(x,y,z)\in V_\rho$，都有 $u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$；换句话说，$u(x,y,z)$ 在 V_ρ 上是常数.

(2) 次证：设 $P^*(x^*,y^*,z^*)$ 为 Ω 的任一内点(即 $P^*\in\Omega$)，则必有

$$u(x^*,y^*,z^*)=u(x_0,y_0,z_0).$$

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 与点 $P^*(x^*,y^*,z^*)$ 连接起来，用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的距离，即

$$\delta=\min\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

其中的 min 是对一切 $(x,y,z)\in\partial\Omega$，$(x',y',z')\in l$ 来取的(由于 $\partial\Omega$，l 是互不相交的有界闭集，可证 min 一定能达到，从而 $\delta>0$)．取 $0<\delta'<\delta$．以点 P_0 为中心，δ' 为半径作一球，得球域 $V_0=\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)\leqslant\delta'^2\}$．此球域完全含于 Ω 内，则(1)段已证的结果知，$u(x,y,z)$ 在 V_0 中为常数．特别是 $u(x_1,y_1,z_1)=u(x_0,y_0,z_0)$．这里点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 代表球面 $S_0=\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\delta^2\}$ 与折线 l 的交点(参看 4337 题的图)．又以点 P_1 为中心，δ' 为半径作一球，得球域 $V_1=\{(x,y,z)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\leqslant\delta'^2\}$．于是，$V_1$ 也完全含于 Ω 内．由于 $u(x,y,z)$ 也在点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 达到最大值，故将(1)段的结果用于 V_1，可知 $u(x,y,z)$ 在 V_1 上是常数．特别是 $u(x_2,y_2,z_2)=u(x_1,y_1,z_1)$．这里点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为球面 $S_1=\{(x,y,z)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\delta'^2\}$ 与 l 的交点(除 P_0 外的另一交点)．再以点 P_2 为中心，δ' 为半径作一球域 V_2，… 这样继续作下去．显然，至多经过 n 次(n 为大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正

整数，s 表折线 l 的长)，点 $P^*(x^*,y^*,z^*)$ 必属于 V_{n-1}。从而

$$u(x^*,y^*,z^*)=u(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})=\cdots$$
$$=u(x_1,y_1,z_1)=u(x_0,y_0,z_0).$$

(3) 由(2)段的结果知，$u(x,y,z)$ 在 Ω 上是常数，根据 $u(x,y,z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的连续性，通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限，即知 $u(x,y,z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是常数. 证毕.

注：从证明过程中看出，需假定区域 Ω(从而 $\overline{\Omega}$) 是连通的. 事实上，若 Ω 不连通，则结论不一定成立. 例如，设 $\overline{\Omega}=V_1+V_2$，其中 V_1 与 V_2 是两个互无公共点的闭球域，而令

$$u(x,y,z)=\begin{cases}C_1,(x,y,z)\in V_1,\\ C_2,(x,y,z)\in V_2,\end{cases}$$

其中 $C_1\neq C_2$ 是两个常数，则 $u(x,y,z)$ 显然是 $\overline{\Omega}$ 上的调和函数且在 Ω 上不是常数，但它却在其内点达到最大值与最小值.

4399. 物体 V 全部浸溺于液体中，从巴斯葛耳定律出发，证明液体的浮力等于物体同体积液体之重而方向垂直向上(阿基米德定律).

证 将 Oxy 坐标面取在液面上，而 Oz 轴垂直液面向下. 设液体比重为 ρ，浸入液体的物体 V 的表面积为 S. 若对应于面积元素 dS 液体的深度为 z，则在 dS 上所受的压力为 $\rho z dS$. 由于此压力总是垂直于 dS 面的，故压力在各坐标轴上的射影为

$$-\rho z\cos\alpha dS,\ -\rho z\cos\beta dS,\ -\rho z\cos\gamma dS.$$

利用奥氏公式，即得作用于物体整个表面的总压力在各

坐标轴上的射影

$$P_x = -\rho\iint\limits_S z\cos\alpha dS = -\rho\iiint\limits_V 0dxdydz = 0,$$

$$P_y = -\rho\iint\limits_S z\cos\beta dS = -\rho\iiint\limits_V 0dxdydz = 0,$$

$$P_z = -\rho\iint\limits_S z\cos\gamma dS = -\rho\iiint\limits_V dxdydz = -\rho V.$$

因此，压力的主向量即合力，朝着垂直向上的方向，其大小等于被物体排出的液体的重量．这就是阿基米德定律．

4400．设 S_t 是变动的球 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$，而函数 $f(\xi,\eta,\zeta)$ 是连续的，证明函数

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t}dS_t$$

满足波动方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初值条件 $u|_{t=0} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f(x,y,z)$.

证 首先指出，本题应设 $f(\xi,\eta,\zeta)$ 具有连续的二阶偏导函数．先验证函数 u 满足初值条件 $u|_{t=0} = 0$（意即 $\lim\limits_{t\to+0} u = 0$）及 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f(x,y,z)$（意即 $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,y,z)$）．今固定 (x,y,z)．由连续性知，存在常数 $M > 0$，使当 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \leqslant 1$ 时恒有

$$|f(\xi,\eta,\zeta)| \leqslant M, |f'_\xi(\xi,\eta,\zeta) \leqslant M,$$

$$|f'_\eta(\xi,\eta,\zeta)| \leqslant M, |f'_\zeta(\xi,\eta,\zeta)| \leqslant M.$$

当 $0 < t < 1$ 时，我们有

$$|u(x,y,z,t)| \leqslant \frac{1}{4\pi t}\iint_{S_t} |f(\xi,\eta,\zeta)|dS_t$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi t}\iint_{S} MdS_t = \frac{1}{4\pi t}\cdot M4\pi t^2$$

$$= Mt,$$

由此可知，$\lim\limits_{t\to+0} u(x,y,z,t) = 0.$

又作变量代换 $\xi = x + ut, \eta = y + vt, \zeta = z + \omega t$，则有

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S} f(x+ut, y+vt, z+\omega t)\cdot tdS, \tag{1}$$

其中 S 是单位球面 $u^2 + v^2 + \omega^2 = 1$. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S} f(x+ut, y+vt, z+\omega t)tdS$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint_{S}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}u + \frac{\partial f}{\partial \eta}v + \frac{\partial f}{\partial \zeta}u\right)tdS$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_{S} f(x+ut, y+vt, z+\omega t)dS$$

$$= I_1 + I_2. \tag{2}$$

显然，当 $0 < t < 1$ 时，

$$|I_1| \leqslant \frac{t}{4\pi}\iint_{S} 3MdS = 3Mt,$$

故 $\lim\limits_{t\to+0} I_1 = 0$，又显然（由于连续性）

$$\lim_{t\to+0} I_2 = \frac{1}{4\pi}\iint_{S} f(x,y,z)dS$$

$$= \frac{f(x,y,z)}{4\pi}\iint_{S} dS = f(x,y,z).$$

因此，得

$$\lim_{t\to+0}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,y,z).$$

下面再验证 u 满足波动方程. 由(2)式，利用奥氏公式，有(V 为球体 $u^2+v^2+\omega^2\leqslant 1$，$V_t$ 为球体 $u_1^2+v_1^2+\omega_1^2\leqslant t^2$)

$$\begin{aligned}
I_1&=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial\eta}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial\zeta}\cos\gamma\right)dS\\
&=\frac{t^2}{4\pi}\iiint\limits_V\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)f(x+ut,y+vt,\\
&\quad z+\omega t)\,du\,dv\,d\omega\\
&=\frac{1}{4\pi t}\iiint\limits_{V_t}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)f(x+u_1,y+v_1,\\
&\quad z+\omega_1)\,du_1dv_1d\omega_1\\
&=\frac{1}{4\pi t}\iiint\limits_{V_t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x+u_1,y+v_1,\\
&\quad z+\omega_1)\,du_1dv_1d\omega_1\\
&=\frac{1}{4\pi t}\Delta\Big(\iiint\limits_{V_t}f(x+u_1,y+v_1,\\
&\quad z+\omega_1)\,du_1dv_1d\omega_1\Big)\\
&=\frac{1}{4\pi t}\Delta\Big(\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+r\cos\psi\cos\varphi,y\\
&\quad+r\cos\psi\sin\varphi,z+r\sin\psi)r^2\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\,dr\Big)\\
&=\frac{I_3}{4\pi t},
\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha=u$，$\cos\beta=v$，$\cos\gamma=\omega$ 为 S 的外法线的方向余弦，又由(2)式及(1)式，有

$$I_2 = \frac{1}{4\pi t}\iint_S f(x+ut,y+vt,z+\omega t)tdS$$

$$= \frac{u}{t},$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{I_3}{4\pi t} + \frac{u}{t}(t>0).$$

于是，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{I_3}{4\pi t^2} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{I_3}{4\pi t^2} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{I_3}{4\pi t} + \frac{u}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I_3}{\partial t}(t>0). \tag{3}$$

但

$$\frac{\partial I_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Delta\Big(\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+r\cos\psi\cos\varphi,$$

$$y+r\cos\psi\sin\varphi, z+r\sin\psi)r^2\cos\psi d\psi d\varphi dr\Big)$$

$$= \Delta\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+r\cos\psi\cos\varphi,$$

$$y+r\cos\psi\sin\varphi, z+r\sin\psi)r^2\cos\psi d\psi d\varphi dr\Big]$$

$$= \Delta\Big[\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+t\cos\psi\cos\varphi,$$

$$y+t\cos\psi\sin\varphi, z+t\sin\psi)t^2\cos\psi d\psi d\varphi\Big]$$

$$= \Delta\Big(\iint_{S_t} f(\xi,\eta,\zeta)dS_t\Big)$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t}\Delta\Big(\iint_{S_t} f(\xi,\eta,\zeta)dS_t\Big)$$

$$= \Delta\left(\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t}dS_t\right)$$

$$= \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t > 0).$$

证毕.

§17. 场论初步

1° **梯度** 若 $\vec{u}(r) = u(x,y,z)$(其中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$) 是连续可微分的数量场,则称向量

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

为 $u(\vec{r})$ 的梯度,或简记为 $\mathrm{grad}u = \nabla u$,其中 $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$. 于已知点 (x,y,z) 场 u 的梯度的方向是与过此点的等位面 $u(x,y,z) = C$ 的法线方向一致. 对于场的每一点此向量给出函数 u 变化之最大速度的大小

$$|\mathrm{grad}u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

与方向.

在某方向 $\vec{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 上场 u 的导数等于

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathrm{grad}u \cdot \vec{l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2° **场的散度与场的旋度** 若

$$\vec{a}(\vec{r}) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

是连续可微分的向量场,则称数量

$$\mathrm{div}\vec{a} = \nabla\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

名为场的旋度.

3° 穿过曲面的流量　若向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 在域 Ω 内产生向量场，则称积分

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}dS = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)dS$$

为穿过位于域 Ω 内的已知曲面 S 的流向法线上单位向量 $\vec{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 所指的那一面的流量. 在向量的论述中奥斯特洛格拉德斯基公式具有下面的形状：

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}dS = \iiint_V \mathrm{div}\vec{a}dxdydz,$$

式中 S 为包围体积 V 的曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线单位向量.

4° 向量的环流　数

$$\int_c \vec{a}d\vec{r} = \int_c a_xdx + a_ydy + a_zdz$$

称为向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 沿某曲线 C 所取的线积分(场作的功).

若围线 C 是封闭的，则称线积分为向量 $\vec{a}$ 沿围线 C 的环流。

在向量的形式上斯托克斯公式为

$$\oint_c \vec{a}d\vec{r} = \iint_S \vec{n}\mathrm{rot}\vec{a}dS,$$

式中 C 为包围曲面 S 的封闭围线，并且对曲面 S 的法线 $\vec{n}$ 之方向应当这样来选择：使得立于曲面 S 上的观察者，以头向着法线的方向，围线 C 的回绕是依反时针前进的方向作成的(对于右旋坐标系).

5° 有势场　向量场 $\vec{a}(\vec{r})$ 是某数量 u 的梯度即 $\mathrm{grad}u = \vec{a}$，$\vec{a}$ 名为有势场，而数量 u 名为场的势.

若势 u 为单值函数，则

$$\int_{AB}\vec{a}d\vec{r}=u(B)-u(A).$$

特别是，在这个情形向量 $\vec{a}$ 的环流等于零.

给定在单联通域内的场 $\vec{a}$ 为有势场的充要条件，是条件 $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$ 满足，就是说，这样的场应当是无旋场.

4401. 求场

$$u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$$

在：(a)$O(0,0,0)$；(б)$A(1,1,1)$；(в)$B(2,1,1)$诸点梯度的大小和方向. 在场的怎样的点，梯度等于零？

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y+3,\frac{\partial u}{\partial y}=4y+x-2,\frac{\partial u}{\partial z}=6z-6.$

(a) 在 O 点，有

$$\operatorname{grad}u=3\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k},|\operatorname{grad}u|=7,$$

方向：$\cos\alpha=\frac{3}{7},\cos\beta=-\frac{2}{7},\cos\gamma=-\frac{6}{7}$；

(б) 在 A 点，有

$$\operatorname{grad}u=6\vec{i}+3\vec{j},|\operatorname{grad}u|=3\sqrt{5},$$

方向：$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\gamma=0$；

(в) 在 B 点，有

$$\operatorname{grad}u=7\vec{i},|\operatorname{grad}u|=7,$$

方向：$\cos\alpha=1,\cos\beta=\cos\gamma=0.$

一般地说，我们有

$$|\operatorname{grad}u|=\sqrt{(2x+y+3)^2+(4y+x-2)^2+(6z-6)^2}.$$

要 $|\operatorname{grad}u|=0$，只要

$$\begin{cases}2x+y+3=0,\\4y+x-2=0,\\6z-6=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=-2,y=1,z=1$，即在点 $(-2,1,1)$ 梯度为零.

4402. 在空间 $Oxyz$ 的那些点，场

$$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

的梯度(a) 垂直于 Oz 轴；(б) 平行于 Oz 轴；(в) 等于零?

解 $\operatorname{grad}u=(3x^2-3yz)\vec{i}+(3y^2-3xz)\vec{j}$

$$+(3z^2-3xy)\vec{k}.$$

(a) 要 $\operatorname{grad}u\perp Oz$，只要 $\operatorname{grad}u\cdot\vec{k}=0$，即 $3z^2-3xy=0$ 或 $z^2=xy$. 因此，在满足 $z^2=xy$ 的点 (x,y,z)，其梯度垂直于 Oz 轴.

(б) 要 $\operatorname{grad}u\parallel Oz$，只要

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0,\\3y^2-3xz=0.\end{cases}$$

解之 得 $x=y=0$ 及 $x=y=z$. 因此，在点 $(0,0,z)$ 及 (x,y,z)（其中 $x=y=z$），其梯度平行于 Oz 轴.

(в) 要 $|\operatorname{grad}u|=0$，只要

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0,\\3y^2-3xz=0,\\3z^2-3xy=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=y=z$. 因此，在满足 $x=y=z$ 的点 (x,y,z)，其梯度等于零.

4403. 已给数量场

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. 在空间 $Oxyz$ 的哪些点下面等式成立

$$|\operatorname{grad} u| = 1?$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^2}$.

于是,

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{r^4}[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}$$

$$= \frac{1}{r}.$$

要 $|\operatorname{grad} u| = 1$, 只要 $r = 1$ 即在以点 (a,b,c) 为中心, 1 为半径的球面上, 均有

$$\left|\operatorname{grad}\left(\ln \frac{1}{r}\right)\right| = 1,$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

4404. 作数量场

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$

的等位面. 求通过点 $M(9,12,28)$ 的等位面. 在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$ 内 $\max u$ 等于什么?

解 等位面可由

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$

化简得到. 显然有

$$u \geqslant \sqrt{(z+8)^2} + \sqrt{(z-8)^2} \geqslant z + 8 - (z-8)$$
$$= 16.$$

于是，当 $u \geqslant 16$ 时，有

$$u - \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2}.$$

平方化简可得

$$u^2 - 32z = 2u\sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2},$$

再平方化简，即得等位面方程

$$\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256} + \frac{4z^2}{u^2} = 1 \quad (u \geqslant 16),$$

这是绕 Oz 轴旋转的一个旋转面. 图形省略.

当 $x = 9, y = 12, z = 28$ 时，$u = 64$. 因此，等位面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{960} + \frac{z^2}{1024} = 1.$$

在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$ 内，由于

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 16z + 64}$$
$$+ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 16z + 64}$$
$$\leqslant \sqrt{100 + 16z} + \sqrt{100 - 16z} \quad (0 \leqslant z \leqslant 6),$$

故函数 $f(z) = \sqrt{100+16z} + \sqrt{100-16z}$ 在 $[0,6]$ 上

的最大值即 u 的最大值. 但是，

$$f(z) = 8\left(\frac{1}{\sqrt{100+16z}} - \frac{1}{\sqrt{100 \quad 16z}}\right) < 0$$
$$(0 < z \leqslant 6),$$

故 $f(z)$ 在 $[0,6]$ 上是严格减函数，从而

$$\max_{0\le z\le 5} f(z) = f(0) = 20.$$

因此，有

$$\max u = 20.$$

4405. 求场

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

在点 $A(1,2,2)$ 及 $B(-3,1,0)$ 的梯度之间

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

在 A,B 点的梯度分别为

$$\text{grad}u(A) = \frac{7}{81} i - \frac{4}{81} j - \frac{4}{81} k,$$

$$\text{grad}u(B) = -\frac{2}{25} i + \frac{3}{50} j.$$

于是，

$$\cos\theta = \frac{\text{grad}u(A) \cdot \text{grad}u(B)}{|\text{grad}u(A)| \cdot |\text{grad}u(B)|}$$

$$= \frac{-\frac{4}{405}}{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10}} = -\frac{8}{9}$$

4406. 设已知数量场

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

作出场的等位面和梯度的等模面.

在域 $1 < z < 2$ 内求 $\inf u, \sup u, \inf|\text{grad}u|$,

$\sup|\mathrm{grad}u|$.

解 将 $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 化简整理,即得

$$x^2+y^2+\frac{u^2-1}{u^2}z^2=0.$$

其中显然有 $0<|u|<1$. 由此可知,等位面是一个以原点为顶点,Oz 轴为旋转轴的圆锥,但要去掉原点 $O(0,0,0)$. 因此,它是一个圆锥孔,又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$-\frac{z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

故有

$$|\mathrm{grad}u|=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}.\text{ 令}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=c.$$

显见此等模面是一个以 Oz 轴为旋转轴的旋转面. 现在令 $y=0$,得

$$x=cx^2+cz^2\text{ 或}\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2+z^2=\frac{1}{4c^2}(c\neq 0).$$

它是 Oxz 面上的圆. 因此,梯度的等模面是一个旋转环面.

当 $1<z<2$ 时,显然有 $0<u\leqslant 1$;且当 $x=y=0$ 时,$u=1$,而当 x^2+y^2 充分大时 u 可任意小,故

$$\inf_{1<z<2}u=0,\ \sup_{1<z<2}u=1.$$

另外,显然

$$\inf_{1<z<2}|\mathrm{grad}u| = \inf_{1<z<2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

由于对于常数 $a>0$,函数 $f(t)=\frac{\sqrt{t}}{t+a}(0\leqslant t<+\infty)$ 当 $t=a$ 时达最大值 $f(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$(这可从讨论 $f(t)$ 简单地得知),故对于固定的 z,$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值是 $\frac{1}{2\sqrt{z^2}}=\frac{1}{2z}(z>0$ 时),由此可知

$$\sup_{1<z<2}|\mathrm{grad}\ u| = \sup_{1<z<2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}.$$

4407. 求在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处之二无限接近的等位面

$$u(x,y,z)=c \text{ 及 } u(x,y,z)=c+\Delta c$$

之间的距离准确到高阶无穷小,其中 $u(x_0,y_0,z_0)=c$.

解 过点 M_0 作等位面 $u(x,y,z)=c$ 的垂线,交等位面 $u(x,y,z)=c+\Delta c$ 于点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,则显然二等位面 $u(x,y,z)=c$ 和 $u(x,y,z)=c+\Delta c$ 之间的距离 $d=|\overrightarrow{M_0M_1}|$. 由于梯度垂直于等位面. 因此 $\mathrm{grad}\ u(x_0,y_0,z_0)$ 的方向与 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 的方向或者重合,或者相反. 于是,注意到 $u(x_0,y_0,z_0)=c$,$u(x_1,y_1,z_1)=c+\Delta c$,知

$$\begin{aligned}\Delta c &= u(x_1,y_1,z_1)-u(x_0,y_0,z_0)\\ &\doteq \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x_1-x_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\cdot(y_1-y_0)\\ &\quad+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z_1-z_0)\end{aligned}$$

$$= [\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)] \cdot \overrightarrow{M_0M_1}$$
$$= \pm |\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)| \cdot |\overrightarrow{M_0M_1}|$$
$$= \pm |\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)| d.$$

由此可知(准确到高阶无穷小)

$$d \doteq \frac{|\Delta c|}{|\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)|}.$$

4408. 证明公式

(a) $\operatorname{grad}(u + c) = \operatorname{grad} u$ (c 为常数);

(б) $\operatorname{grad} cu = c\operatorname{grad} u$ (c 为常数);

(в) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;

(г) $\operatorname{grad} uv = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v$;

(д) $\operatorname{grad}(u^2) = 2u\operatorname{grad} u$;

(e) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u)\operatorname{grad} u$.

证 (a) 由于 $\frac{\partial(u + c)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(u + c)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(u + c)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}$, 故得

$$\operatorname{grad}(u + c) = \operatorname{grad} u.$$

(б) 由于 $\frac{\partial(cu)}{\partial x} = c\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(cu)}{\partial y} = c\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(cu)}{\partial z} = c\frac{\partial u}{\partial z}$, 故得

$$\operatorname{grad} cu = c\operatorname{grad} u.$$

(в) 由于 $\frac{\partial(u + v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial(u + v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial(u + v)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}$, 故得

$$\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v.$$

(г) 由于 $\frac{\partial(uv)}{\partial x} = u\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(uv)}{\partial y} = u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(uv)}{\partial z}$

$= u\dfrac{\partial v}{\partial z} + v\dfrac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{grad} uv = u\operatorname{grad} v + v\operatorname{grad} u.$$

(д) 在(г) 中令 $v = u$，即得

$$\operatorname{grad}(u^2) = 2u\operatorname{grad} u.$$

(е) 由于 $\dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f(u)}{\partial y} = f'(u)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial f(u)}{\partial z}$
$= f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{grad} f(u) = f(u)\operatorname{grad} u.$$

4409. 计算：(a) $\operatorname{grad} r$，(б) $\operatorname{grad} r^2$，(в) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}$，其中 $r =$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 (a) $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$，$\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$，$\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$. 于是，

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}\text{，其中}\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$(б)\operatorname{grad}(r^2) = 2r\operatorname{grad} r = 2r\cdot\frac{\vec{r}}{r} = 2\vec{r},$$

$$(в)\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\operatorname{grad} r = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

4410. 求 $\operatorname{grad} f(r)$，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 $\operatorname{grad} f(r) = f(r)\operatorname{grad} r \overset{*)}{=} f'(r)\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}^{**)}$.

*）利用 4408 题的结果.

**）利用 4409 题的结果.

4411. 求 $\operatorname{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})$，其中 $\vec{c}$ 为常向量，$\vec{r}$ 为从坐标原点起的向径.

解 设 $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$，其中 c_x, c_y, c_z 为常数.
由于

$$\vec{c}\cdot\vec{r}=c_x x+c_y y+c_z z$$

及 $$\frac{\partial(\vec{c}\cdot\vec{r})}{\partial x}=c_x,\frac{\partial(\vec{c}\cdot\vec{r})}{\partial y}=c_y,\frac{\partial(\vec{c}\cdot\vec{r})}{\partial z}=c_z,$$

故 $\text{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})=\vec{c}$.

4412. 求 $\text{grad}\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\}$($\vec{c}$ 为常向量).

解 $|\vec{c}\times\vec{r}|^2=(c_y z-c_z y)^2+(c_z x-c_x z)^2+(c_x y-c_y\cdot x)^2$. 于是,

$$\text{grad}\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\}=[2c_z(c_z x-c_x z)-2c_y(c_x y-c_y\cdot x)]\vec{i}+[-2c_z(c_y z-c_z y)$$

$$+2c_x(c_x y-c_y x)]\vec{j}$$

$$+[2c_y(c_y z-c_z y)-2c_x(c_z x-c_x z)]\vec{k}$$

$$=2[x(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_x(c_x x+c_y y+c_z z)]\vec{i}$$

$$+2[y(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_y(c_x x+c_y y+c_z z)]\vec{j}$$

$$+2[z(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_z(c_x x+c_y y+c_z z)]\vec{k}$$

$$=2\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{c})-2\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{c}).$$

4413. 证明公式

$$\text{grad}f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\text{grad}u+\frac{\partial f}{\partial v}\text{grad}v.$$

证 由于

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z},$$

故有

$$\operatorname{grad} f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)$$
$$+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)$$
$$=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad}u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad}v.$$

4414. 证明公式

$$\nabla^2(uv)=u\nabla^2 v+v\nabla^2 u+2\nabla u\nabla v,$$

其中 $\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$,

$$\nabla^2=\nabla\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

证 由于 $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$,故

$$\nabla^2(uv)=\nabla(\nabla(uv))=\nabla(u\nabla v+v\nabla u)$$
$$=\nabla(u\nabla v)+\nabla(v\nabla u)$$
$$=(u\nabla^2 v+\nabla u\nabla v)+(v\nabla^2 u+\nabla u\nabla v)$$
$$=u\nabla^2 v+v\nabla^2 u+2\nabla u\nabla v.$$

4415. 证明:若函数 $u=u(x,y,z)$ 在凸形域 Ω 内可微分且 $|\operatorname{grad}u|\leqslant M$,其中 M 为常数,则对于 Ω 中任意两点 A,B 有:

$$|u(A)-u(B)|\leqslant M\rho(A,B),$$

式中 $\rho(A,B)$ 为 A 与 B 两点间之距离.

证 由于 Ω 为凸形域,故线段 $\overline{AB}$ 整个属于 Ω. 设 B 的坐标为 (x_0,y_0,z_0),A 的坐标为 (x_1,y_1,z_1),且令 $x_1-x_0=\Delta x$,$y_1-y_0=\Delta y$,$z_1-z_0=\Delta z$. 并考虑一元函数 $f(t)=u(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$,显然 $f(0)=u(B)$,$f(1)=u(A)$,且 $f(t)$ 在[0,1]可微,并且

$$f'(t)=u'_x(x_0+\triangle x,y_0+t\triangle y,z_0+t\triangle z)\triangle x$$
$$+u'_y(x_0+t\triangle x,y_0+t\triangle y,z_0+t\triangle z)\triangle y$$
$$+u'_z(x_0+t\triangle x,y_0+t\triangle y,z_0+t\triangle z)\triangle z.$$

于是，由微分学中值定理知

$$u(A)-u(B)=f(1)-f(0)=f(\xi)$$
$$=u'_x(x_0+\xi\triangle x,y_0+\xi\triangle y,z_0+\xi\triangle z)\triangle x$$
$$+u'_y(x_0+\xi\triangle x,y_0+\xi\triangle y,z_0+\xi\triangle z)\triangle y$$
$$+u'_z(x_0+\xi\triangle x,y_0+\xi\triangle y,z_0+\xi\triangle z)\triangle z$$
$$=[\mathrm{grad}u(x_0+\xi\triangle x,y_0+\xi\triangle y,z_0+\xi\triangle z)]\cdot\overrightarrow{BA},$$

由此可知

$$|u(A)-u(B)|=|[\mathrm{grad}u(x_0+\xi\triangle x,y_0+\xi\triangle y,z_0+\xi\triangle z)]\cdot\overrightarrow{BA}|$$
$$\leqslant|\mathrm{grad}u(x_0+\xi\triangle x,y_0+\xi\triangle y,z_0+\xi\triangle z)|\cdot|\overrightarrow{BA}|\leqslant M\rho(A,B).$$

4416. 求场 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x,y,z)$ 沿此点的向径 $\vec{r}$ 之方向的导数.

在什么情况下，此导数将等于梯度的大小？

解 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\cos\beta=\frac{y}{r}$，$\cos\gamma=\frac{z}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{r}=\frac{2u}{r}.$$

又 $|\mathrm{grad}u|=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$.

要 $|\mathrm{grad}u|=\frac{\partial u}{\partial r}$，只要 $\frac{u}{r}=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$，即只要 $a=b=c$，此即所求之解.

4417. 求场 $u=\frac{1}{r}$（其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）在方向 $\vec{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 上的导数.

在什么情况下，此导数等于零？

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$. 于是，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l}&=-\frac{x}{r^3}\cos\alpha-\frac{y}{r^3}\cos\beta-\frac{z}{r^3}\cos\gamma\\&=-\frac{1}{r^2}[\cos(\vec{r},x)\cos\alpha+\cos(\vec{r},y)\cos\beta\\&\quad+\cos(\vec{r},z)\cos\gamma]\\&=-\frac{\cos(\vec{l},\vec{r})}{r^2}.\end{aligned}$$

要 $\frac{\partial u}{\partial l}=0$，只要 $\cos(\vec{l},\vec{r})=0$，即 $\vec{l}\perp\vec{r}$，此即所求之解.

4418. 求场 $u=u(x,y,z)$ 在场 $v=v(x,y,z)$ 的梯度方向的导数.

在什么情况下，此导数等于零？

解 $\vec{l}=\mathrm{grad}v,\vec{l}_0=\frac{\mathrm{grad}v}{|\mathrm{grad}v|}$. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot\vec{l}_0=\frac{\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v}{|\mathrm{grad}v|}.$$

要 $\frac{\partial u}{\partial l}=0$，只要 $\mathrm{grad}u\perp\mathrm{grad}v$，此即所求之解.

4419$^+$. 设：

$$u=\mathrm{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{ 及 }\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},$$

计算 $$\vec{a}=\vec{c}\times\mathrm{grad}u.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}}\left(-\frac{xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}.$$

于是,

$$\vec{a}=\vec{c}\times \mathrm{grad}u=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}[(x^2+y^2+yz)\vec{i}$$
$$-(x^2+y^2+xz)\vec{j}+(x-y)z\vec{k}].$$

4420. 确定向量场

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k}$$

的力线.

解 力线系这样的一条曲线C,在C上每一点的切线与向量场在该点的方向重合.因此,有$d\vec{r}\parallel\vec{a}$,即

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z},$$

其中$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$.

今有$a_x=x,a_y=y,a_z=2z$,故得

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{2z}.$$

解之，得 $y = c_1 x, z = c_2 x^2$.

4421. 用直接计算的方向证明向量$\vec{a}$ 的散度与直角坐标系的选择无关.

证 设除直角坐标系 $Oxyz$（坐标轴方向的单位向量为 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$）外，另有直角坐标系 $O'x'y'z'$（坐标轴方向的单位向量为$\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$）. 我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

设

$$\begin{cases} \vec{i'} = \cos\alpha_1 \vec{i} + \cos\beta_1 \vec{j} + \cos\gamma_1 \vec{k}, \\ \vec{j'} = \cos\alpha_2 \vec{i} + \cos\beta_2 \vec{j} + \cos\gamma_2 \vec{k}, \\ \vec{k'} = \cos\alpha_3 \vec{i} + \cos\beta_3 \vec{j} + \cos\gamma_3 \vec{k}. \end{cases}$$

又设 $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. 于是，空间一点 P 在两个坐标系中的坐标 (x, y, z) 与 (x', y', z') 之间的关系为（令 $\vec{r} = \overrightarrow{OP}, \vec{r'} = \overrightarrow{O'P}$）：

$$x' = \vec{r'} \cdot \vec{i'} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{i'}$$

$$= (x-a)\cos\alpha_1 + (y-b)\cos\beta_1 + (z-c)\cos\gamma_1,$$

$$y' = \vec{r'} \cdot \vec{j'} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{j'}$$

$$= (x-a)\cos\alpha_2 + (y-b)\cos\beta_2 + (z-c)\cos\gamma_2,$$

$$z' = \vec{r'} \cdot \vec{k'} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{k'}$$

$$= (x-a)\cos\alpha_3 + (y-b)\cos\beta_3 + (z-c)\cos\gamma_3.$$

我们有

$$\vec{a} = a_{x'} \vec{i'} + a_{y'} \vec{j'} + a_{z'} \vec{k'}$$

$$= a_{x'}(\cos\alpha_1 \vec{i} + \cos\beta_1 \vec{j} + \cos\gamma_1 \vec{k})$$

$$+ a_{y'}(\cos\alpha_2 \vec{i} + \cos\beta_2 \vec{j} + \cos\gamma_2 \vec{k})$$

$$+ a_{z'}(\cos\alpha_3 \vec{i} + \cos\beta_3 \vec{j} + \cos\gamma_3 \vec{k}).$$

由此可知

$$a_x = a_{x'}\cos\alpha_1 + a_{y'}\cos\alpha_2 + a_{z'}\cos\alpha_3$$

$$a_y = a_{x'}\cos\beta_1 + a_{y'}\cos\beta_2 + a_{z'}\cos\beta_3$$

$$a_z = a_{x'}\cos\gamma_1 + a_{y'}\cos\gamma_2 + a_{z'}\cos\gamma_3.$$

于是，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_x}{\partial x} &= \frac{\partial a_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} \\
&= \left(\cos\alpha_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \cos\alpha_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} + \cos\alpha_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\alpha_1 \\
&\quad + \left(\cos\alpha_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + \cos\alpha_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \cos\alpha_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\alpha_2 \\
&\quad + \left(\cos\alpha_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial z'} + \cos\alpha_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial z'} + \cos\alpha_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\alpha_3.
\end{aligned}$$

同理，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_y}{\partial y} &= \left(\cos\beta_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \cos\beta_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} + \cos\beta_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\beta_1 \\
&\quad + \left(\cos\beta_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + \cos\beta_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \cos\beta_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\beta_2 \\
&\quad + \left(\cos\beta_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial z'} + \cos\beta_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial z'} + \cos\beta_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\beta_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_z}{\partial z} &= \left(\cos\gamma_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \cos\gamma_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} + \cos\gamma_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\gamma_1 \\
&\quad + \left(\cos\gamma_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + \cos\gamma_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \cos\gamma_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\gamma_2 \\
&\quad + \left(\cos\gamma_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial z'} + \cos\gamma_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial z'} + \cos\gamma_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\gamma_3.
\end{aligned}$$

将这三式相加，得

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\vec{i}' \cdot \vec{i}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}$$

$$+ (\vec{j}' \cdot \vec{i}') \frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} + (\vec{k}' \cdot \vec{i}') \frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}$$

$$+ (\vec{i}' \cdot \vec{j}') \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + (\vec{j}' \cdot \vec{j}') \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + (\vec{k}' \cdot \vec{j}') \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}$$

$$+ (\vec{i}' \cdot \vec{k}') \frac{\partial a_{x'}}{\partial z'} + (\vec{j}' \cdot \vec{k}') \frac{\partial a_{y'}}{\partial z'} + (\vec{k}' \cdot \vec{k}') \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}$$

$$= \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

证毕.

4422. 证明

$$\operatorname{div} \vec{a}\,(M) = \lim_{d(S) \to 0} \frac{1}{V} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS,$$

其中 S 为围绕着点 M 和界有体积 V 的封闭曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 之外法线，$d(S)$ 为曲面 S 的直径.

证 由于

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是$\vec{n}$ 之方向余弦. 应用奥氏公式以及积分中值定理，得

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) dS$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$= \iiint_V (\operatorname{div} \vec{a}) dx dy dz$$

$$= \operatorname{div} \vec{a}\,(M_1) \cdot V,$$

其中 M_1 是 V 中某点，即

$$\operatorname{div} \vec{a}\,(M_1) = \frac{1}{V} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS.$$

令 $d(S)\to 0$,这时 V 缩向点 M,从而点 $M_1\to M$,取极限,即得

$$\operatorname{div}\vec{a}\,(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS.$$

证毕.

4423. 求:

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}.$$

解

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}$$

$$=\operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)$$

$$=0$$

4424. 证明:

(a) $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$;

(б) $\operatorname{div}(u\,\vec{c})=\vec{c}\cdot\operatorname{grad}u$($\vec{c}$ 为常量,u 为数量);

(в) $\operatorname{div}(u\,\vec{a})=u\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad}\mu$.

证 (a) 设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

由于$\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial b_x}{\partial x}$,$\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial b_y}{\partial y}$及$\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial z}=\frac{\partial a_z}{\partial z}+\frac{\partial b_z}{\partial z}$,故得

$$\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}.$$

(б) 设$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$,其中$c_x,c_y,c_z$为常数.

由于$\frac{\partial(uc_x)}{\partial x}=c_x\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial(uc_y)}{\partial y}=c_y\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial(uc_z)}{\partial z}=c_z\frac{\partial u}{\partial z}$,故得

$$\operatorname{div}(u\vec{c})=\vec{c}\cdot\operatorname{grad}u.$$

(в) 由于$\frac{\partial(ua_x)}{\partial x}=u\frac{\partial a_x}{\partial x}+a_x\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial(ua_y)}{\partial y}=u\frac{\partial a_y}{\partial y}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}$及$\frac{\partial(ua_z)}{\partial z}=u\frac{\partial a_z}{\partial z}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}$,故得

$$\operatorname{div}(u\vec{a})=u\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad}u.$$

4425. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)$.

解
$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\\&=\Delta u(\text{或记成 }\nabla^2u).\end{aligned}$$

4426. 求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 在什么情况下 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0$?

解 由 4410 题的结果知,

$$\operatorname{grad}f(r)=f(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

于是,

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = \frac{\partial}{dx}\left[f'(r)\frac{x}{r}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f'(r)\frac{y}{r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[f'(r)\frac{z}{r}\right]$$

$$= f''(r)\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right) + f'(r)\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)$$

$$= f''(r) + \frac{2}{r}f'(r).$$

要 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$，只要 $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$.

将上述方程写成下述形式：

$$rf''(r) + 2f'(r) = 0$$

或 $$[rf''(r) + f(r)] + f'(r) = 0.$$

积分之，即得

$$rf(r) + f(r) = C \quad (C\text{ 为常数}).$$

再积分之，得

$$rf(r) = Cr + C_1 \quad (C_1\text{ 为常数}).$$

于是，最后得

$$f(r) = C + \frac{C_1}{r},$$

此即所求之解.

4427. 计算：(a) $\operatorname{div}\vec{r}$； (6) $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}$.

解 (a) $\operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$

(6) $$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right)$$

$$= \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}.$$

4428. 计算 $\mathrm{div}[f(r)\vec{c}]$，式中 $\vec{c}$ 为常向量.

解 $\mathrm{div}[f(r)\vec{c}] = \vec{c}\cdot \mathrm{grad} f(r)^{*)}$

$$= \vec{c}\cdot f'(r)\frac{\vec{r}^{**)}}{r} = \frac{f'(r)}{r}(\vec{c}\,\vec{r}).$$

*) 利用 4424 题(б) 的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4429. 求 $\mathrm{div}[f(r)\vec{r}]$. 在什么情况下此向量的散度等于零？

解 $\mathrm{div}[f(r)\vec{r}] = f(r)\mathrm{div}\,\vec{r} + \vec{r}\cdot \mathrm{grad} f(r)^{*)}$

$$= 3f(r) + \vec{r}\cdot f'(r)\frac{\vec{r}}{r}^{**)}$$

$$= 3f(r) + rf'(r).$$

要 $\mathrm{div}[f(r)\vec{r}] = 0$，只要 $3f(r) + rf'(r) = 0$，即

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r}.$$

积分之，即得

$$f(r) = \frac{C}{r^3} \quad (C\text{ 为常数}),$$

此即所求之解.

*) 利用 4424 题(в) 的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4430. 求：(a)$\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}\,u)$； (б)$\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}\,v)$.

解 (a)$\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}\,u) = u\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u) + \mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,u^{*)}$

$$= u\Delta u + (\mathrm{grad}\,u)^{2\,**)}$$

(б)$\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}\,v) = u\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,v) + \mathrm{grad}\,v\cdot\mathrm{grad}\,u^{*)}$

$$= u\Delta v + \mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,v^{**)}.$$

*) 利用 4424 题(в) 的结果.

**) 利用 4425 题的结果.

4431. 物体以一定的角速度 ω 依逆时针方向绕 Oz 轴旋转. 求速度向量 $\vec{v}$ 和加速度向量 $\vec{w}$ 在空间的点 $M(x,y,z)$ 和在已知时刻的散度.

解 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$. 微分之,即得

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

$$= \vec{w}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$= \vec{w}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= \vec{w}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}^{\,*)}.$$

为了计算 $\operatorname{div} \vec{v}$ 和 $\operatorname{div} \vec{w}$,先计算 $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r})$,此处 $\vec{a}$ 为常向量. 由于

$$(\vec{a} \times \vec{r})_x = a_y z - a_z y, \quad (\vec{a} \times \vec{r})_y = a_z x - a_x z,$$

$$(\vec{a} \times \vec{r})_z = a_x y - a_y y,$$

故得

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_y z - a_z y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z x - a_x z)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(a_x y - a_y x) = 0.$$

于是,即得

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v}_0 + \operatorname{div}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0.$$

$$\operatorname{div} \vec{w} = \operatorname{div} \vec{w}_0 + \operatorname{div}(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + \operatorname{div}(\vec{\omega} \times \vec{v}_0)$$

$$+ \operatorname{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega}] - \operatorname{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}],$$

而 $\operatorname{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega}] = \vec{\omega} \cdot \vec{r} \operatorname{div} \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \operatorname{grad}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^{**)}$

$$= \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}^{***)} = \omega^2$$

及 $\operatorname{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}] = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$

$$= 3\omega^2,$$

从而，最后得

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = \omega^2 - 3\omega^2 = -2\omega^2.$$

*）利用向量代数中的公式(二重外积展开式)：

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

**）利用 4424 题(в)的结果.

***）利用 4411 题的结果.

4432. 求由引力中心的有限系统所产生的动力场之散度.

解 引力 $\vec{F} = \dfrac{k\vec{r}}{r^3}$ （k 为常数）. 于是，

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kx}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ky}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kz}{r^3}\right) \\ &= k\left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)\right] \\ &= k\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right] \\ &= k\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3}\right) = 0.\end{aligned}$$

4433⁺. 求由极坐标 r 与 φ 所表的平面向量 $\vec{a} = \vec{a}(r,\varphi)$ 之散度的表示式.

解 设极坐标的 r 线与 φ 线的单位矢量为 $\vec{e}_r$ 与 $\vec{e}_\varphi$，且

$$\vec{a}(r,\varphi) = a_r(r,\varphi)\vec{e}_r + a_\varphi(r,\varphi)\vec{e}_\varphi.$$

这里自然假定 a_r, a_φ 都具有连续的偏导函数. 取面积元素 $\Delta S = r\Delta\varphi\Delta r$，记其界线为 ΔC. 首先，推导矢量 $\vec{a}$ 经过界线 ΔC 的通量，即矢流. 通量可分两部分：一部分是经过 r 线的；另一部分是经过 φ 线的. 它们分别是

$$\int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi)dr - \int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r,\varphi)dr$$

$$= \int_{r}^{r+\Delta r} [a_{\varphi}(r,\varphi+\Delta\varphi) - a_{\varphi}(r,\varphi)]dr$$

$$\doteq \int_{r}^{r+\Delta r} \frac{\partial a_{\varphi}(r,\varphi)}{\partial\varphi} \Delta\varphi dr$$

$$\doteq \frac{\partial a_{\varphi}(r,\varphi)}{\partial\varphi} \Delta\varphi \Delta r,$$

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi} a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)d\varphi - \int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi} a_r(r,\varphi)rd\varphi$$

$$= \int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi} [a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)$$

$$- a_r(r,\varphi)r]d\varphi$$

$$\doteq \int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi} \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \Delta r d\varphi$$

$$\doteq \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \Delta r \Delta\varphi,$$

且由于 a_r, a_{φ} 的偏导函数的连续性，当 $\Delta r, \Delta\varphi$ 取得愈小时，上述近似等式愈精确. 于是，矢量 $\vec{a}$ 经过 ΔC 的通量

$$\oint_{\Delta C} \vec{a} \cdot \vec{n} ds \doteq \left[\frac{\partial a_{\varphi}(r,\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right] \Delta\varphi \Delta r,$$

其中 $\vec{n}$ 为曲线 ΔC 的外法线方向，而且当 $\Delta r, \Delta\varphi$ 愈小时此近似等式愈精确.

于是，根据散度的定义，并注意到 ΔS 收缩为一点 (r,φ) 与 $\Delta r \to 0, \Delta\varphi \to 0$ 等价，从而即得

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta C} \vec{a} \cdot \vec{n} ds}{\Delta S}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta r \to 0 \\ \Delta\varphi \to 0}} \frac{\left\{\frac{\partial a_{\varphi}(r,\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\} \Delta r \Delta\varphi}{r \Delta r \Delta\varphi}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right].$$

4434. 设

$$x = f(u,v,\omega),\ y = g(u,v,\omega),\ z = h(u,v,\omega).$$

用直交曲线坐标 u,v,ω 表示 div $\vec{a}(x,y,z)$.

作为特殊的情形，求用柱坐标和球坐标表示 div $\vec{a}$ 的表示式.

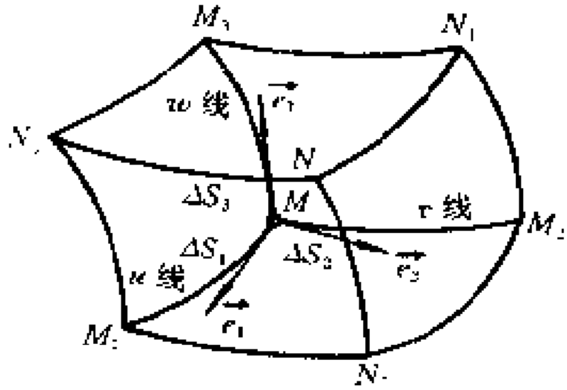

图 8.72

解　考虑向量 $\vec{a}$ 通过由曲面 $u=$ 常数，$v=$ 常数，$\omega=$ 常数所界的小立体（接近于长方体）V 的表面 S 的流量（图 8.72），我们有 $\vec{a} = a_u\vec{e}_1 + a_v\vec{e}_2 + a_w\vec{e}_3$.

在 u 曲线上，只有 u 变化（v 和 ω 都是常数），故

$$d\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial u}du\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}du\,\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}du\,\vec{k},$$

从而

$$ds = |d\vec{r}| = Ldu,$$

其中 $$L = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

ds_1 为 u 曲线上的弧元素. 同理可得

$$dx_2 = Mdv, ds_3 = Nd\omega,$$

其中 dx_2, ds_3 分别为 v, ω 曲线上的弧元素，而

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega}\right)^2}.$$

由于坐标曲线互相垂直，$\triangle s_1$，$\triangle s_2$，$\triangle s_3$ 都很小，故 V 接近于长方体. 因此，其体积为

$$\begin{aligned} V &\doteq \triangle s_1 \triangle s_2 \triangle s_3 \doteq ds_1 ds_2 ds_3 \\ &= LMNdudvd\omega. \end{aligned}$$

现计算 $\vec{a}$ 通过 V 的表面 S 向外的流量 $\iint\limits_S a_n dS$，S 共包括六块小曲面（图 8.72），记垂直于 $\vec{e}_1$ 方向的两块为 S_1 与 S_2（即图中的 $MM_2N_1M_3$ 与 $M_1N_3NN_2$），垂直于 $\vec{e}_2$ 方向的两块为 S_3 与 S_4，垂直于 $\vec{e}_3$ 方向的两块为 S_5 与 S_6. 显然，由于曲面很小，有

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{S_2} a_n dS + \iint\limits_{S_1} a_n dS \\ &\doteq a_u \triangle S_2 \triangle S_3 \,|\, (u + \triangle u, v, \omega) \\ &\quad - a_u \triangle S_2 \triangle S_3 \,|\, (u, v, \omega) \\ &\doteq a_u MNdvd\omega \,|\, (u + \triangle u, v, \omega) \\ &\quad - a_u MNdvd\omega \,|\, (u, v, \omega) \\ &\doteq \frac{\partial(a_u MNdvd\omega)}{\partial u} du \\ &= \frac{\partial(MNa_u)}{\partial u} dudvd\omega. \end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_{S_1} a_n dS + \iint_{S_4} a_n dS \doteq \frac{\partial(NLa_v)}{\partial v} du dv d\omega,$$

$$\iint_{S_6} a_n dS + \iint_{S_5} a_n dS \doteq \frac{\partial(LMa_w)}{\partial w} du dv d\omega.$$

相加即得

$$\iint_S a_n dS \doteq \left[\frac{\partial(MNa_u)}{\partial u} + \frac{\partial(NLa_v)}{\partial v} + \frac{\partial(LMa_w)}{\partial w}\right] du dv d\omega.$$

于是，

$$\frac{\iint_S a_n dS}{V} \doteq \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right].$$

显然，当小立体 V 愈缩向点 M(V 愈小）时，上述各近似等式都愈精确. 于是，令 V 缩向 M(即 S 的直径 $d(S)$ 趋于零）取极限，利用 4422 题的结果，得

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{d(S)\to 0} \frac{\iint_S a_n dS}{V}$$

$$= \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right].$$

特别是在柱坐标情形下，有

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$$

$$(u = r, v = \varphi, \omega = z).$$

从而

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}=1,$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=r,$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}=1.$$

于是,

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right].$$

在球坐标情形下,有

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,y=\rho\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z=\rho\cos\theta(u=\rho,v=\theta,w=\varphi).$$

于是,

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2}=1,$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}=\rho$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=\rho\sin\theta.$$

由此可知

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{a}&=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2\sin\theta)\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\rho\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi\rho)\right]\\&=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2)\right.\\&\qquad\left.+\rho\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\sin\theta)+\rho\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right].\end{aligned}$$

4435. 证明:

(a) $\text{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\text{rot}\,\vec{a}+\text{rot}\,\vec{b}$;

(б) $\text{rot}(u\,\vec{a})=u\,\text{rot}\,\vec{a}+\text{grad}\,u\times\vec{a}$.

证 (a) 设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$,$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$,则有

$$\text{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x+b_x & a_y+b_y & a_z+b_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$=\text{rot}\,\vec{a}+\text{rot}\,\vec{b}.$$

$$(б)\ \text{rot}_x(u\,\vec{a})=\frac{\partial}{\partial y}(ua_z)-\frac{\partial}{\partial z}(ua_y)$$

$$=u\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\left(a_z\frac{\partial u}{\partial y}-a_y\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=u\,\text{rot}_x\,\vec{a}+(\text{grad}\,u\times\vec{a})_x,$$

同法可得

$$\text{rot}_y(u\,\vec{a})=u\,\text{rot}_y\,\vec{a}+(\text{grad}\,u\times\vec{a})_y,$$

$$\text{rot}_z(u\,\vec{a})=u\,\text{rot}_z\,\vec{a}+(\text{grad}\,u\times\vec{a})_z.$$

于是,

$$\text{rot}(u\,\vec{a})=u\,\text{rot}\,\vec{a}+\text{grad}\,u\times\vec{a}.$$

4436. 求:(a) $\text{rot}\,\vec{r}$;(б) $\text{rot}[f(r)\,\vec{r}]$.

解 (a) $$\text{rot}\,\vec{r}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0}.$$

(6) $\text{rot}[f(r)\vec{r}] = f(r)\text{rot}\,\vec{r} + \text{grad}\,f(r)\times\vec{r}^{*)}$

$= \vec{0} + f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}\times\vec{r}^{**)}$

$= \vec{0}.$

*) 利用 4435 题(6) 的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4437. 求：(a) $\text{rot}\,\vec{c}f(r)$，(6) $\text{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]$（$\vec{c}$ 为定向量）.

解 (a) $\text{rot}\,\vec{c}f(r) = f(r)\text{rot}\,\vec{c} + \text{grad}\,f(r)\times\vec{c}$

$= \dfrac{f'(r)}{r}(\vec{r}\times\vec{c}).$

(6) $\text{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}] = f(r)\text{rot}(\vec{c}\times\vec{r})$

$+ \text{grad}\,f(r)\times(\vec{c}\times\vec{r})$. 但是，

$$\text{rot}(\vec{c}\times\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ c_y z - c_z y & c_z x - c_x z & c_x y - c_y x \end{vmatrix} = 2\vec{c}$$

$\text{grad}\,f(r)\times(\vec{c}\times\vec{r}) = \dfrac{f'(r)}{r}\vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{r})$

$= \dfrac{f'(r)}{r}[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{c} - (\vec{r}\cdot\vec{c})\vec{r}],$

故最后得

$$\text{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}] = 2f(r)\vec{c} + \frac{f'(r)}{r}[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{c} - (\vec{r}\cdot\vec{c})\vec{r}]$$

4438. 证明 $\text{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\text{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\cdot\text{rot}\,\vec{b}$.

证 $\text{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(a_y b_z - a_z b_y) + \dfrac{\partial}{\partial y}(a_z b_x - a_x b_z)$

$+ \dfrac{\partial}{\partial z}(a_x b_y - a_y b_x)$

$$= b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

$$+ b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right)$$

$$- a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) - a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)$$

$$= \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}.$$

4439. 求：(a)$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$；(б)$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a})$.

解 (a)
$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

(б)
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = 0.$$

4440. 物体以一定的角速度 ω 围绕轴 $\vec{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 旋转. 求速度向量 $\vec{v}$ 在空间的点 $M(x,y,z)$ 和在已知时刻的旋度.

解 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$. 从而有

$$v_x = v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z,$$

$$v_z = v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x.$$

由于 $\operatorname{rot}_x \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x$，$\operatorname{rot}_y \vec{v} = 2\omega_y$ 及 $\operatorname{rot}_z \vec{v} = 2\omega_z$. 故 $\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$.

4441. 求向量 $\vec{r}$ 的流量：(a) 穿过圆锥形 $x^2 + y^2 \leqslant z^2 (0 \leqslant z \leqslant$

h) 的侧表面;(б) 穿过此圆锥形的底.

解 (a) 在侧面上,点的向径的方向与圆锥的母线重合. 因此,点的向径与圆锥在该点的法线互相垂直,即$\vec{r}$在法线方向上的射影$\vec{r}^n = 0$. 于是,向量r穿过侧面D的流量为

$$\iint_D r_n dS = 0.$$

(б) 在圆锥形的底面上,$r_n = h$. 于是,所求的流量为

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2} r_n dS = h \cdot \pi h^2 = \pi h^3.$$

4442. 求向量$\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$的流量:(a) 穿过圆柱$x^2 + y^2 \leqslant a^2 (0 \leqslant z \leqslant h)$的侧表面;(б) 穿过此圆柱的全表面.

解 先求(б),由于

$$\iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \iiint_V 0 dV = 0,$$

故向量$\vec{a}$穿过圆柱的全表面的流量为零.

再求(a),又由于$S = S_{侧} + S_{上、下底}$及在上、下底上$a_n = xy$,故有

$$\iint_{S_{上、下底}} a_n dS = \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} xydxdy$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r^3 \sin\varphi\cos\varphi dr = 0.$$

于是,

$$\iint_{S_{侧}} a_n dS = 0,$$

即向量 $\vec{a}$ 穿过侧面的流量也为零.

4443. 求向径 $\vec{r}$ 穿过曲面

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leqslant z \leqslant 1)$$

的流量

解 设 S 为所给的曲面(锥), D 为锥的底面(即 Oxy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leqslant 1$). 由于

$$\iint\limits_S r_n dS + \iint\limits_D r_n dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{r} dV$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r} dz = \pi$$

及在 D 上, $\vec{r} \perp \vec{n}$, 故 $rn = 0$, $\iint\limits_D r_n dS = 0$, 从而, 得

$$\iint\limits_S r_n dS = \pi.$$

4444. 求向量 $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ 穿过球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$ 的正八分之一的流量.

解 设 S 为所给的曲面, S_1, S_2 及 S_3 为球内三个坐标平面上的部分, 则有

$$\iint\limits_S a_n dS + \iint\limits_{S_1} a_n dS + \iint\limits_{S_2} a_n dS + \iint\limits_{S_3} a_n dS$$

$$= \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ x>0, y>0, z>0}} \operatorname{div}\vec{a} dV = 2 \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ x>0, y>0, z>0}} (x + y + z) dx dy dz$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2\cos\psi \cdot r(\cos\varphi\cos\psi$$

$$+ \sin\varphi\cos\psi + \sin\psi) dr$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos\psi\sin\psi+\cos^2\psi(\cos\varphi+\sin\varphi)]d\psi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]d\varphi$$

$$=\frac{3}{8}\pi.$$

但在 $S_i(i=1,2,3)$ 上，显然有 $\vec{a}\perp\vec{n}$，故 $a_n=0$，从而 $\iint\limits_{S_i}a_n dS=0(i=1,2,3)$. 于是，所求的流量为

$$\iint\limits_{S}a_n dS=\frac{3}{8}\pi.$$

4445. 求向量 $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ 穿过由诸平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=a(a>0)$ 所包围角锥的全表面的流量.

利用奥斯特洛格拉德斯基公式，验证结果.

解 方法一：

由于 $\operatorname{div}\vec{a}=0$，

故所求的流量为

$$\iint\limits_{S}a_n dS=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\vec{a}dV=0.$$

方法二：

如图 8.73 所示.

在平面 $z=0(S_1)$ 上.

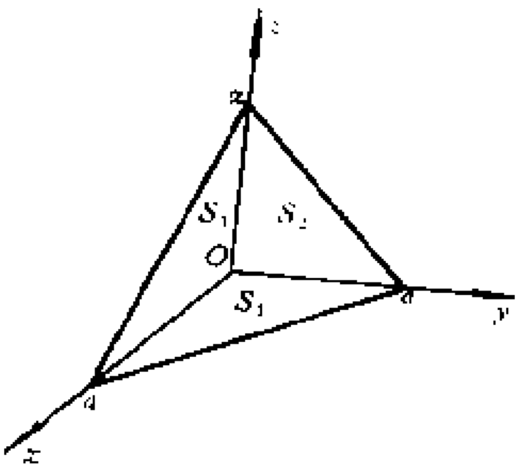

图 8.73

$\vec{n}=\{0,0,-1\}$；在平面 $y=0(S_3)$ 上，$\vec{n}=\{0,-1,0\}$；在平面 $x=0(S_2)$ 上，$\vec{n}=\{-1,0,0\}$.

于是，向量 $\vec{a}$ 穿过曲面 S_1 的流量为

$$\iint_{S_1} a_n dS = \iint_{S_1} \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\substack{x+y\le a\\ x\ge 0,y\ge 0}} (-x)dxdy$$

$$= -\frac{a^3}{6}.$$

同法可求得向量 $\vec{a}$ 穿过 S_2 及 S_3 面的流量也为 $-\frac{a^3}{6}$.

对于平面 $x+y+z=a(S_4)$，其法向量为 $\vec{n}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$，故流量为

$$\iint_{S_4} a_n dS = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{S_4}(y+z+x)dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\substack{x+y\le a\\ x\ge 0,y\ge 0}} a\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,dxdy = \frac{a^3}{2}.$$

因此，最后得向量 $\vec{a}$ 穿过角锥全表面的流量为

$$\sum_{i=1}^{4}\iint_{S_i} a_n dS = \frac{a^3}{2}+3\left(-\frac{a^3}{6}\right)=0.$$

4446. 证明：向量 $\vec{a}$ 穿过由方程式 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)\ ((u,v)\in\Omega)$ 所给出的曲面 S 的流量等于

$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Omega}\left(\vec{a}\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)dudv,$$

式中 $\vec{n}$ 为曲面 S 的法线之单位向量.

证 设曲面 S 的方程为

$$\vec{r}=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},$$

则有

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}.$$

从而

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\vec{j}$$

$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\vec{k}.$$

因此，易得

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|=\sqrt{EG-F^2}$$

又$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$的方向显然是法线$\vec{n}$的方向. 于是，我们有

$$\iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iint\limits_\Omega \vec{a}\cdot\sqrt{EG-F^2}\,\vec{n}\,dudv$$

$$=\iint\limits_\Omega \vec{a}\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)dudv$$

$$=\iint\limits_\Omega\left(\vec{a}\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)dudv.$$

4447. 求向量$\vec{a}=m\dfrac{\vec{r}}{r^3}$（$m$ 为常数）穿过围绕坐标原点的封闭

曲面 S 的流量.

解 所求的流量为

$$\iint_S a_n dS = m\iint_S \frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{n}dS = m\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS$$

$$= m\cdot 4\pi^{*)} = 4\pi m.$$

*) 利用 4392 题(σ) 的结果.

4448. 已知向量

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right),$$

其中 e_i 为常数,r_i 为点 M_i(起点) 距动点 $M(\vec{r})$ 的距离. 求此向量穿过围绕点 $M_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的封闭曲面 S 的流量.

解 首先,我们有

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{e_i\vec{r}_i}{4\pi r_i^3}.$$

其次,我们考虑这样一个立体(V),它由曲面 S 及包围点 $M_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的 n 个小球所围成(这些小球的球心在点 M_i,半径为 ρ_i). 由于 $\operatorname{div}\vec{a}$ 在 V 内为零. 故

$$\iint_S a_n dS = \sum_{j=1}^{n}\iint_{S_j} a_n dS,$$

其中 S_j 为第 j 个小球面. 但是

$$\iint_{S_j} a_n dS = \iint_{S_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i\vec{r}_i}{4\pi r_i^3}\right)\cdot\vec{n}dS.$$

由于

$$\iint\limits_{S_j} \frac{1}{r_i^3}(\vec{r}_i \cdot \vec{n})dS = \iint\limits_{S_j} \frac{\cos(\vec{r}_i, \vec{n})}{r_i^2} dS$$

$$= \begin{cases} 0, 当\ j \neq i\ 时; \\ 4\pi, 当\ j = i\ 时, \end{cases}$$

故得

$$\iint\limits_{S_j} a_n dS = e_j.$$

从而

$$\iint\limits_{S} a_n dS = \sum_{j=1}^{n} e_j.$$

*）　利用 4392 题的结果.

4449. 证明：

$$\iint\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_{V} \nabla^2 u dx dy dz,$$

其中曲面 S 包围体积 V.

证　参看 4393 题(a).

4450. 在单位时间内经过曲面元素 dS 而进入温度场 u 的热量等于

$$dQ = -k\vec{n} \cdot \operatorname{grad} u dS,$$

其中 k 为内热的传导系数，$\vec{n}$ 为曲面 S 的法线之单位向量. 求在单位时间内物体 V 所积累的热量. 研究温度上升的速度以推出为物体温度所满足的方程式（热传导方程式）.

解　由于

$$dQ = -k\vec{n} \cdot \operatorname{grad} u dS = -k \operatorname{grad}_n u dS,$$

故由奥氏公式，即得

$$Q=-\iint_S k\,\text{grad}_n u\,dS=\iiint_V k\,\text{div}(\text{grad}u)\,dS.$$

因此，每单位时间内向立体内部流入的热量为

$$\iiint_V \text{div}(k\,\text{grad}u)\,dS. \tag{1}$$

这一热量引起立体内部温度的增加，现在我们从另一方面再来计算此热量. 在时间 dt 内温度 u 增加

$$du=\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

需要对体积元素 dV 输入热量

$$c\,du\rho dV=c\frac{\partial u}{\partial t}\rho\,dt\,dV,$$

其中 c 为物体在所考察的点处的热容量. 于是，在时间 dt 内整个立体就要吸收热量

$$dt\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV,$$

而在每单位时间内所吸收的热量即为

$$\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV. \tag{2}$$

比较(1)式及(2)式，便得等式

$$\iiint_V\left\{c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\text{div}(k\,\text{grad}u)\right\}dV=0.$$

由于上式对取在所考察境域内的任何立体 V 都适合，且被积函数显见连续，故根据 4097 题的结果，当点属于所考察的境域时，恒有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\text{div}(k\,\text{grad}u),$$

此即所求的热传导方程.

4451. 在运动中不可压缩的液体占有体积 V. 假定在域 V 内源

泉和漏孔都不存在，试推出连续性的方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0,$$

式中 $\rho = \rho(x,y,z,t)$ 为液体密度，$\vec{v}$ 为速度向量，t 为时间.

解 首先，我们已知：在每单位时间内自 V 中的任一立体 V' 的表面 S' 向外流出的流量 Q 为

$$Q = \iint\limits_{S'} \rho v_n dS = \iiint\limits_{V'} \mathrm{div}(\rho\vec{v})dV. \tag{1}$$

现在我们用另一法来计算 Q，如考虑到在时间 dt 内密度 ρ 增加 $\frac{\partial\rho}{\partial t}dt$，则立体元素 dV 的质量就增加 $\frac{\partial\rho}{\partial t}dtdV$，而整个所考察的立体 V' 的质量就增加

$$dt\iiint\limits_{V'} \frac{\partial\rho}{\partial t}dV.$$

因此，每单位时间内 V' 中质量减少

$$-\iiint\limits_{V'} \frac{\partial\rho}{\partial t}dV.$$

由于 V 内无源泉和漏孔，故这个减少的质量正好就是从 V' 的表面 S' 流出的质量流量 Q，即

$$Q = -\iiint\limits_{V'} \frac{\partial\rho}{\partial t}dV. \tag{2}$$

比较(1)式和(2)式，便得等式

$$\iiint\limits_{V'} \left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v})\right\}dV = 0.$$

由于上式对 V 中任一立体 V' 均成立，且被积函数连续，故根据 4097 题的结果，当 $(x,y,z) \in V$ 时，恒有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0.$$

4452. 求向量 $\vec{a} = \vec{r}$ 沿着螺线

$$\vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}\,(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

的一段的功.

解 由于

$$d\vec{r} = (-a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k})dt,$$

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = b^2 t dt,$$

故所求的功为

$$W = \int_0^{2\pi} b^2 t dt = 2\pi^2 b^2.$$

4453. 求向量 $\vec{a} = f(r)\vec{r}$(其中 f 是连续函数)沿着弧 AB 的功.

解 所求的功为

$$W = \int_{r_A}^{r_B} f(r)\vec{r} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} f(r)\vec{r} \cdot \vec{t}^0 ds$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} f(r) r dr,$$

其中$\vec{t}^0$ 是单位切向量.

4454. 求向量

$$\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$$

(c 为常数) 的环流:(a) 沿着圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.
(б) 沿着圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$.

解 (a) 圆 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 的向径 $\vec{r}$ 适合方程

$$\vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + 0\vec{k} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

由于

$$\vec{a}\cdot d\vec{r} = (-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + c\vec{k})\cdot$$
$$(-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + 0\vec{k})dt$$
$$= dt,$$

故所求的环流为

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(б) 对于圆$(x-2)^2+y^2=1, z=0$，有

$$\vec{r} = (2+\cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j} + 0\vec{k}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

由于

$$\vec{a}\cdot d\vec{r} = (2\cos t + 1)dt,$$

故所求的环流为

$$\int_0^{2\pi}(2\cos t + 1)dt = 2\pi.$$

4455. 求向量 $\vec{a}=\text{grad}\left(\text{arctg}\ \frac{y}{x}\right)$ 沿着围线 C 的环流 Γ：(a)C 不围绕 Oz 轴；(б)C 围绕 Oz 轴.

解 我们有

$$\vec{a} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

于是，易知

$$rot\vec{a} = \vec{0}\ (\text{除 } x = y = 0, \text{即 } Oz \text{ 轴上的点}).$$

(a) 若 C 不围绕 Oz 轴，则可于 C 上张一曲面 S，使 S 与 Oz 轴不相交，于是，根据斯托克斯公式，得

$$\Gamma = \oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{n}\cdot rot\vec{a}\, dS = 0.$$

(б) 若 C 围绕 Oz 轴. 先设 C 正好围绕 Oz 轴旋转一周，取常数 $\tau<0$ 充分小，使 C 位于平面 $z=\tau$ 的上方. 在

平面 $z=\tau$ 上围绕 Oz 轴取一圆周 $C_r(x^2+y^2=r^2, z=\tau)$ 充分小，使半径 r 小于 C 到 Oz 轴的距离. 以 C 与 C_r 为边界张上一曲面 S，使 S 与 Oz 轴不相交. 由斯托克斯公式，得

$$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}+\oint_{-C_r}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_S \vec{n}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{a}\,dS=0,$$

其中 $-C_r$ 表示沿顺时针方向取向. 于是

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_{C_r}\vec{a}\cdot d\vec{r}.$$

但取 C_r 的参数方程 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=\tau$ 后，得

$$\begin{aligned}\oint_{C_r}\vec{a}\cdot d\vec{r}&=\int_0^{2\pi}\Big[\left(-\frac{r\sin\theta}{r^2}\right)(-r\sin\theta)\\&\qquad+\left(\frac{r\cos\theta}{r^2}\right)(r\cos\theta)\Big]d\theta\\&=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi.\end{aligned}$$

从而

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi.$$

现设 C 围绕 Oz 轴旋转了 n 圈. 为叙述简单起见，假定 $n=2$. 在平面

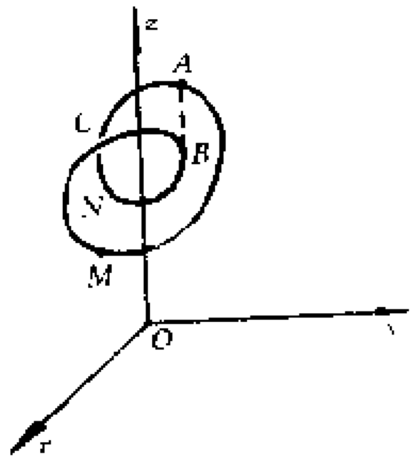

图 8.74

Ozx 上引辅助线(直线段)AB，将 C 分解成两个只绕 Oz 轴转一周的闭曲线 $C_1=ABMA$ 与 $C_2=ANBA$(图 8.74). 根据前面已证的结果可知

$$\oint_{C_1}\vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi,\quad \oint_{C_2}\vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi.$$

于是，注意到$\overline{AB}$上的线积分（第二型）与$\overline{BA}$上的线积分相消，即得

$$\Gamma = \oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{a}\cdot d\vec{r} = 4\pi.$$

完全类似地，可得一般情况（C围绕Oz轴转n圈）时，有

$$\Gamma = \oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = 2\pi n.$$

4456*). 平面的不可压缩稳流由速度向量

$$\vec{\omega} = u(x,y)\vec{i} + v(x,y)\vec{j}$$

描写出来，求出：(1) 经过包围域S的封闭围线C所流出液体的量Q（液体的消耗）；(2) 速度向量沿着围线C的环流Γ. 若流场无源泉、无漏孔且无旋度，则函数u和v满足什么样的方程式？

解 (1) 考虑包含着点$D(x,y)$的两边长分别为Δx与Δy的小矩形元$ABCD$（图8.75）.

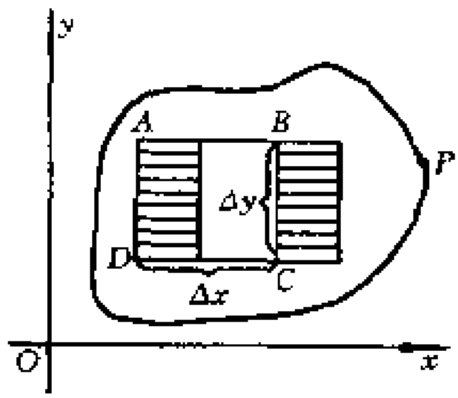

图 8.75

在单位时间内沿Qx轴方向从AD边流入的量为$u(x,y)\cdot\Delta y$（为简单起见，设密度$\rho=1$），而同时从BC边流出的量为$u(x+\Delta x,y)\Delta y$. 于是，在单位时间内，沿Ox轴方向从单位面积的小正方形内流出的量为

$$\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x\Delta y}\Delta y.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，此比值的极限 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 就是在点 (x,y) 沿 Ox 轴方向的发散强度. 类似地，$\frac{\partial v}{\partial y}$ 就是在点 (x,y) 沿 Oy 轴方向的发散强度. 于是，在点 (x,y) 处液体的发散强度为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$，而对于面积元 $dxdy$ 的流量即为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

因此，总的流量为

$$Q=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

另一解法：令点 P 为围线 C 上的任一点，$\vec{n}$ 为向外法线，考虑曲线元素 ds. 单位时间内通过 ds 弧段的流量为

$$dQ=\omega_n ds,$$

其中 ω_n 为点 P 处的流速 $\vec{\omega}$ 在法向量 $\vec{n}$ 上的投影：$\omega_n=\vec{\omega}\cdot\vec{n}$. 于是，所求的通过曲线 C 的流量为

$$Q=\int_C\omega_n ds.$$

但是，$\omega_n=\vec{\omega}\cdot\vec{n}=u\cos(n,x)+v\cos(n,y)=u\frac{dy}{ds}-v\cdot\frac{dx}{ds}$ **)，故得

$$Q=\int_C udy-vdx.$$

应用格林公式，即得

$$Q = \iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

$$(2) d\Gamma = \vec{\omega} \cdot d\vec{r} = udx + vdy, \text{故}$$

$$\Gamma = \int_C udx + vdy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy.$$

若流场无源泉无漏孔及无旋度，则对于流场中任何围线 C 及其所包围的域 S，均有

$$Q = 0 \text{ 及 } \Gamma = 0.$$

于是，在流场中的每一点，均有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ 及} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

或
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \text{ 及} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

这就是 u,v 所应满足的方程.

*）编者注：从原书答案来看，本题叙述有误. 最后的问题中"流体是不可压缩"应改为"流场无源泉、无漏孔"，而在题目开始，应假定流体不可压缩.

**）参看 4324 题的推导.

4457. 证明：场

$$\vec{a} = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$$

是有势场，并求这个场的势.

解 由于对空间任一点 (x,y,z) 均有

$$rot\vec{a} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y}[xy(x + y + 2z)] - \frac{\partial}{\partial z}[xz(x + 2y + z)] \right\} \vec{i}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial z}[yz(2x+y+z)]\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}[xy(x+y+2z)]\right\}\vec{j}$$
$$+\left\{\frac{\partial}{\partial x}[xz(x+2y+z)]\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial y}[yz(2x+y+z)]\right\}\vec{k}$$
$$=\vec{0},$$

故 $\vec{a}$ 为有势场.

又由于势 u 满足

$$\begin{aligned}du &= \vec{a}\cdot d\vec{r}\\ &= yz(2x+y+z)dx + xz(x+2y+z)dy\\ &\quad + xy(x+y+2z)dz\\ &= xyz(dx+dy+dz)+(x+y+z)\\ &\quad \cdot(yzdx+zxdy+xydz)\\ &= xyzd(x+y+z)+(x+y+z)d(xyz)\\ &= d[xyz(x+y+z)],\end{aligned}$$

故势 $u=xyz(x+y+z)+C$,其中 C 为任意常数.

4458. 求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力场

$$\vec{a}=-\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

的势.

解 由于

$$du=\vec{a}\cdot d\vec{r}=-\frac{m}{r^3}(xdx+ydy+zdz)$$

$$=-\frac{m}{2r^3}d(r^2)$$

$$= -\frac{m}{r^2}dr = d\left(\frac{m}{r}\right),$$

故势 $u = \frac{m}{r} + C$(C 为任意常数)，通常取 $u = \frac{m}{r}(r \neq 0)$.

4459. 求位置在 $M_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 各点的质量系 $m_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 所产生引力场的势.

解 引力场 $\vec{a} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^3}\vec{r}_i$，其中 r_i 为动点 M 与 M_i 之间的距离. 由于

$$du = \vec{a}\cdot d\vec{r} = d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}\right),$$

故势 $u = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i} + C$($C$ 为任意常数)，通常取 $u = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}$.

4460. 证明：场 $\vec{a} = f(r)\vec{r}$（其中 $f(r)$ 是单值连续函数）是有势场. 求这个场的势.

解 利用 4436 题(σ) 的结果，即知 $rot(f(r)\vec{r}) = \vec{0}$，故 $\vec{a}$ 为有势场. 又由于

$$du = \vec{a}\cdot d\vec{r} = xf(r)dx + yf(r)dy + zf(r)dz$$
$$= \frac{1}{2}f(r)d(r^2) = rf(r)dr,$$

故势 $u = \int_{r_0}^{r} tf(t)dt$，其中 $r = \sqrt{x^2+y^2-z^2}$.

4461. 证明公式

$$\mathrm{grad}_P\left\{\iiint_V \rho(Q)\frac{dV}{r}\right\} = -\iint_S \rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}$$

$$+\iiint_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q)\,\frac{dV}{r},$$

其中 S 为包含体积 V 的曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线，r 为点 $P(x,y,z)$ 与点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 两点间的距离.

证 首先指出，题中需假定 $\rho(Q)$ 在 V 上具有连续的导函数.

i) 先设点 $P(x,y,z)$ 在 V 之外. 令

$$f(x,y,z)=\iiint_V \rho(Q)\,\frac{dV}{r}. \tag{1}$$

显然，右端积分的被积函数对参变量 x,y,z 都具有连续的偏导函数，故可在积分号下求导数，得

$$\operatorname{grad}_P f=\iiint_V \rho(Q)\operatorname{grad}_P \frac{1}{r}dV. \tag{2}$$

又由于

$$\operatorname{grad}_P \frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}=-\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r},\ \vec{r}=\vec{QP}.$$

代入(2)式，得

$$\operatorname{grad}_P f=-\iiint_V \rho(Q)\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}dV. \tag{3}$$

在公式(4408题(Г))

$$\operatorname{grad}_Q(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}_Q\psi+\psi\operatorname{grad}_Q\varphi$$

中，令 $\varphi=\rho(Q)$，$\psi=\dfrac{1}{r}$，再代入(3)式，得

$$\operatorname{grad}_P f=-\iiint_V \operatorname{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV$$

$$+\iiint_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q)\,\frac{dV}{r}. \tag{4}$$

根据奥氏公式，有

$$\iiint_V \mathrm{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV = \iint_S \rho(Q)\vec{n}\,\frac{dS}{r}. \tag{5}$$

将上式代入(4)式,即得

$$\mathrm{grad}_P f = -\iint_S \rho(Q)\vec{n}\,\frac{dS}{r} + \iiint_V \mathrm{grad}_Q\rho(Q)\,\frac{dV}{r}.$$

ii) 现设点 $P(x,y,z)$ 在 V 的内部. 仍按(1)式令 $f(x,y,z)$. 注意,这时(1)式右端的积分为广义重积分(点 P 为瑕点);但易知它收敛,因为在以 P 点为中心,ε 为半径的球域 V_ε 上的积分满足($M=\max\limits_{Q\in V}|\rho(Q)|$)

$$\left|\iiint_{V_\varepsilon}\frac{\rho(Q)}{r}dV\right| \leqslant \iiint_{V_\varepsilon}\frac{|\rho(Q)|}{r}dV \leqslant M\iiint_{V_\varepsilon}\frac{dV}{r}$$

$$= M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{r^2}{r}dr = 2M\pi\varepsilon^2 \to 0(\text{当 } \varepsilon\to+0$$

时).

我们证明:这时仍可将(1)式的积分在积分号下求导数而得(2)式. 事实上,由于

$$\left|\iiint_{V_\varepsilon}\rho(Q)\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV\right| \leqslant \iiint_{V_\varepsilon}\left|\rho(Q)\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\right|dV$$

$$= \iiint_{V_\varepsilon}\left|-\rho(Q)\,\frac{x-\xi}{r^3}\right|dV \leqslant M\iiint_{V_\varepsilon}\frac{dV}{r^2}$$

$$= M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{r^2}{r^2}dr = 4M\pi\varepsilon,$$

故积分

$$\iiint_V \rho(Q)\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\,dV$$

关于 x 一致收敛. 于是,(1)式右端的积分可在积分号下

关于 x 求偏导函数，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\iiint_V \rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV. \tag{6}$$

同理可得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\iiint_V \rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}dV, \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\iiint_V \rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}dV. \tag{8}$$

由(6)，(7)，(8)三式，即得(2)式，仿 i) 段办法，可得(3)式与(4)式(注意，仿前，可知(4)式右端两个积分都收敛)．但不能直接对 V 应用奥氏公式而得(5)式，因为有瑕点 P，但显然可对 $V-V\varepsilon$，应用奥氏公式，得

$$\iiint_{V-V_\varepsilon}\mathrm{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV=\iint_{S+S_\varepsilon}\rho(Q)\vec{n}\,\frac{dS}{r}, \tag{9}$$

其中 S_ε 为球域 V_ε 的边界(球面)，在 S_ε 上的 $\vec{n}$ 是指向点 P 的．由于

$$\left|\iint_{S_\varepsilon}\rho(\theta)\vec{n}\,\frac{dS}{r}\right|\leqslant\sqrt{3}\iint_{S_\varepsilon}|\rho(\theta)|\frac{dS}{r}\leqslant\sqrt{3}M\iint_{S_\varepsilon}\frac{dS}{r}$$

$$=\frac{\sqrt{3}M}{\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon}dS=\frac{\sqrt{3}M}{\varepsilon}\cdot 4\pi\varepsilon^2=4\sqrt{3}\pi M\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{S_\varepsilon}\rho(\theta)\vec{n}\,\frac{dS}{r}=0.$$

于是，在(9)式两端令 $\varepsilon\to+0$ 取极限，即得(5)式．以

(5) 式代入 (4) 式，最后得所要证的公式

$$\text{grad}_P\left\{\iiint\limits_V \rho(\theta)\frac{dV}{r}\right\} = -\iint\limits_S \rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r} + \iiint\limits_V \text{grad}_Q\rho(Q)\frac{dV}{r}.$$

证毕.

4462. 证明：若 $\vec{a} = \text{grad}u$，其中

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta$$

及 $$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

则 $$\text{div}\vec{a} = \rho(x,y,z)$$

(假定对应的积分有意义).

证 首先指出，为保证题述的广义重积分(既是无穷积分，又是瑕积分)的存在性以及下面要用到的积分号下求导数的合理性，一般我们需假定：$\rho(\xi,\eta,\zeta)$ 在全空间具有连续的偏导函数，并且当 $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ 充分大时($R \geqslant R_0$)，有

$$|\rho(\xi,\eta,\zeta)| \leqslant \frac{M}{R^{2+\alpha}}, \tag{1}$$

其中 $M > 0$，$\alpha > 0$ 是两个常数.

考虑空间任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 用 V_0 表示以 P_0 为中心，1 为半径的单位球域. 我们先限制点 $P(x,y,z)$ 只在 V_0 中变动. 又用 V_1 表示以 P_0 为中心，2 为半径的球域，V_2 表示整个空间去掉 V_1 所剩下的部分(无界域). 令

$$u_1(x,y,z) = \iiint\limits_{V_1}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta, \tag{2}$$

$$u_2(x,y,z)=\iiint\limits_{V_2}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta. \tag{3}$$

于是，

$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}[u_1(x,y,z)+u_2(x,y,z)]. \tag{4}$$

(2) 式右端为瑕积分，在 4461 题证明的第 ii) 段中已证它是收敛的；(3) 式右端为无穷积分，下面证明它收敛. 令

$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$，$R_1=max\{R_0,2(r_0+1)\}$，则当 $R\geqslant R_1$ 时，有 $R\geqslant R_0$(从而(1) 式满足)，且 $R\geqslant 2(r_0+1)$. 以 Q 表示点(ξ,η,ζ)，O 表示原点$(0,0,0)$. 由于三角形两边之和大于第三边，故(注意 $P\in V_0$).

$$R=\overline{OQ}\leqslant\overline{OP}+\overline{PQ}\leqslant r_0+1+r\leqslant\frac{R}{2}+r,$$

从而

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\left|\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\right|d\xi d\eta d\zeta$$

$$\leqslant M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{rR^{2+\alpha}}$$

$$\leqslant 2M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{3+\alpha}}$$

$$=2M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{R_1}^{+\infty}\frac{R^2}{R^{3+\alpha}}dR$$

$$=2M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{R_1}^{+\infty}\frac{dR}{R^{1+\alpha}}$$

$$= \frac{8M\pi}{\alpha R_1^{\alpha}} < +\infty. \tag{5}$$

故(3)式右端的无穷积分收敛.

由(4)式知 $u(x,y,z)$ 有定义. 由于 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$,故我们只要证明

$$\Delta u = \rho(x,y,z). \tag{6}$$

我们证明(3)式右端的无穷积分可在积分号下求导数两次:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \iiint\limits_{V_2} \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta d\zeta, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \iiint\limits_{V_2} \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta d\zeta. \tag{8}$$

为此,只要证明(7)式右端的积分和(8)式右端的积分都关于 $(x,y,z) \in V_0$ 一致收敛. 由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\xi - x}{r^3}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\xi - x)^2}{r^5},$$

故仿(5)式之推导,可得:当 $R_2 > R_1 = max\{R_0, 2(r_0 + 1)\}$ 时,对一切 $(x,y,z) \in V_0$,有

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant R_2^2} \left| \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \right| d\xi d\eta d\zeta$$

$$\leqslant M \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2 R^{2+\alpha}} \leqslant 4M \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{4+\alpha}}$$

$$= \frac{16M\pi}{(1+\alpha)R_2^{1+\alpha}},$$

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant R_2^2} \left| \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) \right| d\xi d\eta d\zeta$$

$$\leqslant 4M \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^3 R^{2+\alpha}}$$

$$\leqslant 32M \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{5+\alpha}}$$

$$= \frac{128M\pi}{(2+\alpha)R_2^{2+\alpha}}.$$

由此可知，(7) 式右端的积分和(8) 式右端的积分都关于$(x,y,z) \in V_0$一致收敛. 因此，(7) 式与(8) 式当$(x,y,z) \in V_0$时成立. 同理可证，当$(x,y,z) \in V_0$时，有

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \iiint\limits_{V_2} \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta d\zeta, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \iiint\limits_{V_2} \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta d\zeta. \tag{10}$$

将(8)，(9)，(10) 三式相加，即得(注意到 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$)

$$\Delta u_2 = \iiint\limits_{V_2} \rho(\xi,\eta,\zeta) \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta d\zeta = 0. \tag{11}$$

下面再求 $\Delta u_1 = \mathrm{div}(\mathrm{grad} u_1)$. 由 4461 题的结果知

$$\mathrm{grad} u_1 = -\iint\limits_{S_1} \rho(Q)\vec{n} \frac{dS}{r} + \iiint\limits_{V_1} \mathrm{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}, \tag{12}$$

其中S_1表示V_1的边界(球面). 显然，当$P(x,y,z) \in V_0$时，(12) 式右端的第一个积分(面积分) 的被积函数具有对于x,y及z的连续偏导函数，故可在积分号下求对于x,y及z的偏导函数. 另外，仿照4461题ii) 段之证可知(12) 式右端的第二个积分(三重积分) 也可在积分号下求对于x,y及z的偏导函数. 于是，得

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}u_1) = -\iint\limits_{S_1}\operatorname{div}_P\left[\frac{\rho(Q)\vec{n}}{r}\right]dS$$

$$+\iiint\limits_{V_1}\operatorname{div}_P\left[\frac{1}{r}\operatorname{grad}_Q\rho(Q)\right]dV. \quad (13)$$

利用公式 $\operatorname{div}(v\vec{a}) = v\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad}v$(4424 题(B)),可知(注意到 $\rho(Q)\vec{n}$ 及 $\operatorname{grad}_Q\rho(Q)$ 均与 P 无关)

$$\operatorname{div}_P\left[\frac{\rho(Q)\vec{n}}{r}\right] = \rho(Q)\vec{n}\cdot\operatorname{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\rho(Q)\vec{n}\cdot\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\operatorname{div}_P\left[\frac{1}{r}\operatorname{grad}_Q\rho(Q)\right] = \operatorname{grad}_Q\rho(Q)\cdot\operatorname{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\operatorname{grad}_Q\rho(Q)\cdot\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right).$$

代入(13)式,得

$$\Delta u_1 = \iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS - \iiint\limits_{V_1}\operatorname{grad}_Q\rho(Q)$$

$$\cdot\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)dV. \quad (14)$$

由于

$$\operatorname{div}_Q\left[\rho(Q)\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \rho(Q)\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right) + \operatorname{grad}_Q\rho(Q)$$

$\cdot\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)$,而 $\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right) = 0(Q \neq P)$,故(14)式可写为

$$\Delta u_1 = \iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

$$-\iiint\limits_{V_1}\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV. \tag{15}$$

下面计算(15)式中的三重积分，用Ω_ε表示以点$P(x,y,z)$为中心，ε为半径的球域，其边界(球面)记为S_ε. 对$V_1 - \Omega_\varepsilon$应用奥氏公式，得

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{V_1-\Omega_\varepsilon}\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV \\
=&\iint\limits_{S_1+S_\varepsilon}\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{n}dS \\
=&\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS,
\end{aligned} \tag{16}$$

其中$\vec{n}$是向外法线，从而在S_ε上是指向点$P(x,y,z)$的. 由中值定理知

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS=-\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)dS \\
=&\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)\frac{dS}{r^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)dS \\
=&\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\rho(Q_\varepsilon)\cdot 4\pi\varepsilon^2 \\
=&4\pi\rho(Q_\varepsilon),
\end{aligned}$$

其中Q_ε是球面S_ε上的某一点. 代入(16)式，得

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{V_1-\Omega_\varepsilon}\mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV \\
=&\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS+4\pi\rho(Q_\varepsilon),
\end{aligned}$$

两端令$\varepsilon\to+0$取极限，得

$$\iiint_{V_1} \mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV$$
$$= \iint_{S_1} \rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS + 4\pi\rho(P),$$

再以此式代入(15)式,得

$$\Delta u_1 = -4\pi\rho(x,y,z). \tag{17}$$

由(17)式,(11)式以及(4)式,即得(6)式. 于是,(6)式对一切点 $P(x,y,z)\in V0$ 成立. 由于 V_0 的中心 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是任意的(可为空间任一点),故知(6)式对空间任一点都成立. 证毕.